DM 10

Correction

1. (a) f est dérivable sur $\mathbb{R}_*^+$ comme quotient et différence de fonctions polynomiales, donc dérivables sur $\mathbb{R}_*^+$.
On a $\forall x \in \mathbb{R}_*^+, f'(x) = \dfrac{3}{x^2}$.
On a donc

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	
$f(x)$	‖	$-\infty \nearrow$	4

On a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 4$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$.
On étudie pour tout $x \in \mathbb{R}^+$ le signe de $f(x) - x$. Soit $x \in \mathbb{R}^+$,

$$\begin{aligned} f(x) - x &= 4 - \frac{3}{x} - x, \\ &= \frac{-x^2 + 4x - 3}{x}. \end{aligned}$$

On calcule Δ le discriminant de $x \to -x^2 + 4x - 3$.

$$\begin{aligned} \Delta &= 4^2 - 4 \times (-1) \times (-3), \\ &= 4. \end{aligned}$$

$\Delta > 0$, donc $x \to -x^2 + 4x - 3$ admet deux racines réelles,

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-4 - \sqrt{4}}{-2}, & \text{et} \quad x_2 &= \frac{-4 + \sqrt{4}}{-2}, \\ &= 3, & &= 1. \end{aligned}$$

D'où le tableau de signes :

x	0		1		3		$+\infty$
$-x^2 + 4x - 3$	‖	$+$		$+$		$+$	
x	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x) - x$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	

(b) .

(c) u semble croissante, et converger vers 3.

2. Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$: « $2 \leq u_n \leq 3$ ».

   Initialisation : Montrons $\mathcal{P}(0)$.

   $u_0 = 2$ donc $2 \leq u_0 \leq 3$. D'où $\mathcal{P}(0)$.

   Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose $\mathcal{P}(n)$ et on montre $\mathcal{P}(n+1)$.

   f est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ donc comme $2 \leq u_n \leq 3$, on a

$$\begin{array}{lccccc} & f(2) & \leq & f(u_n) & \leq & f(3), \\ \text{donc} & \dfrac{5}{2} & \leq & u_{n+1} & \leq & 3, \\ \text{donc} & 2 & \leq & u_{n+1} & \leq & 3. \end{array}$$

   D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

   Finalement, par le principe de récurrence, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, 2 \leq u_n \leq 3.}$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$, on sait par la question précédente que $u_n \in [2,3]$ donc par le tableau de signes de la question 1, on a

$$\begin{array}{lrcl} & f(u_n) - u_n & \geq & 0, \\ \text{donc} & u_{n+1} - u_n & \geq & 0, \\ \text{donc} & u_{n+1} & \geq & u_n. \end{array}$$

   Finalement, $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \geq u_n$ donc $\boxed{u \text{ est croissante.}}$

4. Par les questions précédentes, u est croissante et majorée par 3, donc d'après le théorème de la limite monotone, u converge. Notons ℓ sa limite.

   On sait que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \geq 2$, donc par passage à la limite $\ell \geq 2$. En particulier $\ell \neq 0$.

$$\left.\begin{array}{r} \lim\limits_{n \to +\infty} u_{n+1} = \ell, \\ \lim\limits_{n \to +\infty} 4 - \dfrac{3}{u_n} = 4 - \dfrac{3}{\ell}, \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 4 - \dfrac{3}{u_n}, \end{array}\right\} \text{ ainsi, par unicité de la limite, } \ell = f(\ell).$$

   On a donc

$$\begin{array}{lccl} & \ell & = & f(\ell), \\ \text{donc} & 0 & = & f(\ell) - \ell, \\ \text{donc} & \ell = 1 & \text{ou} & \ell = 3. \text{ (voir question 1)} \end{array}$$

   Donc $\ell = 3$.

   Finalement, $\boxed{u \text{ converge vers } 3.}$