DM 11

Correction

1. (a) On a $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{x}{e^x}$, donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions dérivables (exp et polynomiale). Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{-x} - xe^{-x}, \\ &= (1-x)e^{-x}. \end{aligned}$$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$1-x$		$+$	0	$-$	
e^{-x}		$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$	0

$$\begin{aligned} \lim_{x\to-\infty} f(x) &= \lim_{x\to-\infty} xe^{-x}, \\ &= -\infty. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty} f(x) &= \lim_{x\to+\infty} xe^{-x}, \\ &= 0, \text{ par croissances comparées.} \end{aligned}$$

(b) Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f(x) - x &= xe^{-x} - x, \\ &= x(e^{-x} - 1), \end{aligned}$$

or

$$\begin{aligned} e^{-x} - 1 = 0 &\Leftrightarrow e^{-x} = 1, \\ &\Leftrightarrow -x = 0, \\ &\Leftrightarrow x = 0, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} e^{-x} - 1 > 0 \quad &\Leftrightarrow \quad e^{-x} > 1, \\ &\Leftrightarrow \quad -x > 0, \text{ car ln et exp sont strictement croissantes} \\ &\Leftrightarrow \quad x < 0. \end{aligned}$$

Ainsi,

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x		$-$	0	$+$	
$e^{-x} - 1$		$+$	0	$-$	
$f(x) - x$		$-$	0	$-$	

(c) $\boxed{u \text{ semble être décroissante et converger vers } 0.}$

2. Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$: « $u_n > 0$ ».
   INITIALISATION : On sait que $u_0 = 1$ d'où $\mathcal{P}(0)$.
   HÉRÉDITÉ : Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose $\mathcal{P}(n)$ et on montre $\mathcal{P}(n+1)$.
   Par hypothèse de récurrence $u_n > 0$, donc $u_n e^{-u_n} > 0$, ainsi $u_{n+1} > 0$. D'où $\mathcal{P}(n+1)$.
   Finalement, par le principe de récurrence, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0.}$
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. On sait par 2 que $u_n > 0$, donc par 1b,

$$\begin{array}{rrcl} & f(u_n) - u_n & < & 0, \\ \text{donc} & f(u_n) & < & u_n, \\ \text{donc} & u_{n+1} & < & u_n, \end{array}$$

   Finalement, $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} < u_n$, donc $\boxed{u \text{ est strictement décroissante.}}$
4. On sait par 2 et 3 que u est décroissante et minorée, donc par le théorème de la limite monotone $\boxed{u \text{ converge.}}$
   On note ℓ sa limite.
   On a
   - $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$,
   - $\lim\limits_{n \to +\infty} u_{n+1} = \ell$
   - f est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc continue sur $\mathbb{R}$, en particulier en ℓ, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} f(u_n) = f(\ell)$.

   Ainsi, par unicité de la limite, $f(\ell) = \ell$, d'où, $f(\ell) - \ell = 0$, donc d'après 1b, $\ell = 0$.
   Finalement, $\boxed{u \text{ converge et sa limite est } 0.}$