

DM 13

Correction

1. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$: « $\alpha_n > 0$ ».

Initialisation : D'après l'énoncé, $\alpha_0 > 0$ d'où $\mathcal{P}(0)$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose $\mathcal{P}(n)$ et on montre $\mathcal{P}(n+1)$.

Par hypothèse de récurrence, $\alpha_n > 0$. Donc, comme, $e^{-\alpha_n} > 0$, on a $e^{-\alpha_n} \alpha_n > 0$.

Ainsi $\alpha_{n+1} > 0$, d'où $\mathcal{P}(n+1)$.

Donc par le principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\alpha_n > 0$. En particulier $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est minorée.

Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} &= \frac{e^{-\alpha_n} \alpha_n}{\alpha_n}, \\ &= e^{-\alpha_n}. \end{aligned}$$

Or $\alpha_n > 0$, donc $-\alpha_n < 0$, et par stricte croissance de $\exp$ sur $\mathbb{R}$, on a $e^{-\alpha_n} < 1$.

Ainsi $\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} < 1$ donc, comme $\alpha_n > 0$, on a $\alpha_{n+1} < \alpha_n$.

Donc, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\alpha_{n+1} < \alpha_n$, donc $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

Finalement, $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et minorée, donc, par le théorème de la limite monotone, converge.

On note ℓ sa limite.

- $\exp$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc en particulier en $-\ell$, ainsi $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-\alpha_n} \alpha_n = e^{-\ell} \ell$.
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_{n+1} = \ell$.
- $\forall n \in \mathbb{N}$, $\alpha_{n+1} = e^{-\alpha_n} \alpha_n$.

Donc, par unicité de la limite

$$\begin{aligned} \ell &= e^{-\ell} \ell, \\ \text{donc } 0 &= e^{-\ell} \ell - \ell, \\ \text{donc } 0 &= \ell(e^{-\ell} - 1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{donc } \ell = 0 &\quad \text{ou} \quad e^{-\ell} - 1 = 0, \\ \text{donc } \ell = 0 &\quad \text{ou} \quad e^{-\ell} = 1, \\ \text{donc } \ell = 0 &\quad \text{ou} \quad -\ell = 0, \\ \text{donc } \ell = 0 &\quad \text{ou} \quad \ell = 0, \end{aligned}$$

donc $\ell = 0$.

Finalement $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et sa limite est 0.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \beta_{n+1} - \beta_n &= \ln(\alpha_{n+1}) - \ln(\alpha_n), \\ &= \ln(e^{-\alpha_n} \alpha_n) - \ln(\alpha_n), \\ &= \ln(e^{-\alpha_n}) + \ln(\alpha_n) - \ln(\alpha_n), \\ &= -\alpha_n. \end{aligned}$$

Donc, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\beta_{n+1} - \beta_n = -\alpha_n$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^n \alpha_k &= \sum_{k=0}^n \beta_k - \beta_{k+1}, \text{ par 2} \\ &= \beta_0 - \beta_{n+1}, \text{ télescopage.}\end{aligned}$$

$$\text{Donc } \forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n \alpha_k = \beta_0 - \beta_{n+1}.$$

Or

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow +\infty} \beta_0 - \beta_{n+1} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(\alpha_0) - \ln(\alpha_{n+1}), \\ &= +\infty, \text{ par 1.}\end{aligned}$$

$$\text{Ainsi } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \alpha_k = +\infty.$$

$$\text{Finalement, } \boxed{\sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n \text{ diverge.}}$$