DM 14

Correction

1. On pose

$$g : \left\{ \begin{array}{rcl} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) - x. \end{array} \right.$$

- $x \mapsto -\frac{x^2}{2}$ est dérivable sur $[0,1]$ comme fonction polynomiale,
- exp est dérivable sur $\mathbb{R}$,
- $\forall x \in \mathbb{R}, -\frac{x^2}{2} \in \mathbb{R}$.

Donc f est dérivable sur $[0,1]$.

Ainsi g est dérivable (et donc continue) sur $[0,1]$ comme différence de fonctions dérivables.

$$\forall x \in [0,1], g'(x) = -xe^{-\frac{x^2}{2}} - 1.$$

Soit $x \in [0,1]$

$$\begin{array}{rrcl} & -x & \leq & 0 \\ \text{donc} & -xe^{-\frac{x^2}{2}} & \leq & 0 \\ \text{donc} & -xe^{-\frac{x^2}{2}} - 1 & \leq & -1 \\ \text{donc} & -xe^{-\frac{x^2}{2}} - 1 & < & 0 \end{array}$$

Ainsi $\forall x \in [0,1], g'(x) < 0$. Donc g est strictement décroissante sur $[0,1]$.

De plus $g(0) = 1$ et $g(1) = e^{-\frac{1}{2}} - 1$. Or $-\dfrac{1}{2} < 0$ donc, par croissance de exp, $e^{-\frac{1}{2}} < 1$ donc $g(1) < 0$.

Ainsi $0 \in [g(1), g(0)]$.

Finalement par théorème de la bijection, $g(x) = 0$ admet une unique solution dans $[0,1]$ et donc $f(x) = x$ admet une unique solution dans $[0,1]$.

2. Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$: « $u_n \in [0,1]$ ».
Initialisation : Montrons $\mathcal{P}(0)$.

D'après l'énonce $u_0 \in [0,1]$, d'où $\mathcal{P}(0)$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose $\mathcal{P}(n)$, montrons $\mathcal{P}(n+1)$.

Par hypothèse de récurrence $0 \leq u_n \leq 1$, donc par stricte croissance de la fonction carrée sur $\mathbb{R}^+$,

$$\begin{array}{ccccccc} & 0 & \leq & u_n^2 & \leq & 1 \\ \text{donc} & 0 & \geq & -\dfrac{u_n^2}{2} & \geq & -\dfrac{1}{2}, \\ \text{donc par croissance de exp} & 1 & \geq & e^{-\frac{u_n^2}{2}} & \geq & e^{-\frac{1}{2}}, \\ \text{donc} & 1 & \geq & u_{n+1} & \geq & 0. \end{array}$$

ainsi $u_{n+1} \in [0,1]$. D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

Par le principe de récurrence on a montré que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [0,1].}$

3. (a) D'après les calculs précédents $\forall x \in [0,1], |f'(x)| = |-xe^{-\frac{x^2}{2}}| = xe^{-\frac{x^2}{2}}$.
On pose

$$h : \left\{ \begin{array}{rcl} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & xe^{-\frac{x^2}{2}}. \end{array} \right.$$

h est dérivable comme produit de fonctions dérivables (polynomiale et f).
Soit $x \in [0,1]$,

$$\begin{aligned} h(x) &= e^{-\frac{x^2}{2}} - x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}, \\ &= (1-x^2)e^{-\frac{x^2}{2}}, \\ &= (1-x)(1+x)e^{-\frac{x^2}{2}}. \end{aligned}$$

x	0		1
$1-x$		$+$	0
$1+x$		$+$	
$e^{-\frac{x^2}{2}}$		$+$	
$h'(x)$		$+$	0
$h(x)$	0	$\nearrow$	$e^{-\frac{1}{2}}$

Or $e^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{e}}$.

Donc par lecture du tableau de variations $\forall x \in [0,1], h(x) \leq \dfrac{1}{\sqrt{e}}$.

Ainsi $\boxed{\forall x \in [0,1], |f'(x)| \leq \dfrac{1}{\sqrt{e}}.}$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$,

- $u_n \in [0,1]$,
- $\alpha \in [0,1]$,
- f est dérivable et donc continue sur $[0,1]$,
- $\forall x \in [0,1], |f'(x)| \leq \dfrac{1}{\sqrt{e}}$.

Donc par inégalité des accroissements finis on a

$$|f(u_n) - f(\alpha)| \leq \frac{1}{\sqrt{e}}|u_n - \alpha|,$$

ainsi

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{\sqrt{e}}|u_n - \alpha|.$$

Finalement $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{\sqrt{e}}|u_n - \alpha|.}$

(c) Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$: « $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^n |u_0 - \alpha|$ ».
Initialisation : Montrons $\mathcal{P}(0)$.
$\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^0 |u_0 - \alpha| = |u_0 - \alpha|$, d'où en particulier $\mathcal{P}(0)$.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose $\mathcal{P}(n)$, montrons $\mathcal{P}(n+1)$.
Par hypothèse de récurrence

$$|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^n |u_0 - \alpha|,$$

donc

$$\frac{1}{\sqrt{e}}|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^{n+1} |u_0 - \alpha|,$$

or par la question précédente

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{\sqrt{e}}|u_n - \alpha|.$$

Donc

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^{n+1} |u_0 - \alpha|.$$

D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

Par le principe de récurrence on a montré que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^{n} |u_0 - \alpha|.}$

(d) D'après la question précédente $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^{n} |u_0 - \alpha|$.
Or $\frac{1}{\sqrt{e}} = e^{-\frac{1}{2}}$, donc $\frac{1}{\sqrt{e}} \in]-1, 1[$.
Ainsi $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^{n} |u_0 - \alpha| = 0$.
Donc par théorème d'encadrement,

$$\lim_{n \to +\infty} |u_n - \alpha| = 0,$$

donc

$$\lim_{n \to +\infty} u_n - \alpha = 0,$$

donc

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = \alpha.}$$