DM 15

Correction

On pose pour tout entier naturel non nul k, A_k : « On obtient 5 ou 6 au k ème lancer ».
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{array}{rcl} P(U_n) & = & P\left(\left(\bigcap_{k=1}^{n-1} \overline{A_k}\right) \cap A_n\right), \\ & = & P\left(\overline{A_1}\right) \times P_{\overline{A_1}}\left(\overline{A_2}\right) \times \cdots \times P_{\bigcap_{k=1}^{n-2} \overline{A_k}}\left(\overline{A_{n-1}}\right) \times P_{\bigcap_{k=1}^{n-1} \overline{A_k}}\left(A_n\right), \text{ par les probabilités composées} \\ & = & \left(\frac{4}{6}\right)^{n-1} \times \frac{2}{6}, \text{ car dé équilibré} \\ & = & \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}. \end{array}$$

Donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, P(U_n) = \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}.$$

Par la formule de Bayes,

$$P_N(U_i) = \frac{P(U_i) \times P_{U_i}(N)}{P(N)}.$$

$(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est un système complet d'évènement, car on pioche dans une urne et une seule. Donc par les probabilités totales, la série $\sum P(U_n) \times P_{U_n}(N)$ converge et

$$\begin{array}{rcl} P(N) & = & \sum_{n=1}^{+\infty} P(U_n) \times P_{U_n}(N), \\ & = & \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \frac{i}{3i}, \text{ car boules indiscernables} \\ & = & \frac{1}{9} \sum_{l=0}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{l}, \text{ avec } l = n-1 \\ & = & \frac{1}{9} \frac{1}{1-\frac{2}{3}}, \\ & = & \frac{1}{9} \times 3, \\ & = & \frac{1}{3}. \end{array}$$

Ainsi,

$$\begin{array}{rcl} P_N(U_i) & = & \frac{P(U_i) \times P_{U_i}(N)}{P(N)}, \\ & = & \frac{\frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{i-1} \times \frac{i}{3i}}{\frac{1}{3}}, \\ & = & \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{i-1}. \end{array}$$

Finalement, sachant que l'on a pioché une boule noire, la probabilité que le tirage ait été effectué dans l'urne i est $\frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{i-1}$.