DM 16

Correction

1. (a) Le support de X semble être $\mathbb{N}$.
 (b) On note, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, N_i : « Le i ème ninja réussit à capturer l'élève ».
 Soit $k \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned} P(X = k) &= P\left(\left(\bigcap_{i=1}^{k-1} \overline{N_i}\right) \cap N_k\right), \\ &= P(\overline{N_1}) \times P_{\overline{N_1}}(\overline{N_2}) \times \cdots \times P_{\bigcap_{i=1}^{k-2} \overline{N_i}}(\overline{N_{k-1}}) \times P_{\bigcap_{i=1}^{k-1} \overline{N_i}}(N_k), \text{ par probabilités composées} \\ &= (1-p)^{k-1} p. \end{aligned}$$

Donc $\forall k \in \mathbb{N}^*, P(X = k) = (1-p)^{k-1} p.$

- (c) $([X = n])_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une famille d'événements deux à deux incompatibles donc la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} P(X = n)$ converge et

$$\begin{aligned} P(X \in \mathbb{N}^*) &= \sum_{n=1}^{+\infty} P(X = n), \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} (1-p)^{n-1} p, \\ &= \frac{p}{1-p} \sum_{n=1}^{+\infty} (1-p)^n, \\ &= \frac{p}{1-p} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (1-p)^n - 1 \right), \\ &= \frac{p}{1-p} \left(\frac{1}{1-(1-p)} - 1 \right), \\ &= \frac{p}{1-p} \times \frac{1-p}{p}, \\ &= 1. \end{aligned}$$

Donc $P(X = 0) = 1 - P(X \in \mathbb{N}^*) = 0$.

Donc le support de X est $\mathbb{N}^*$ et $\forall k \in \mathbb{N}, P(X = k) = (1-p)^{k-1} p$.

Ainsi $X \leftrightarrow \mathcal{G}(p)$.

2. On note T : « L'élève dévoile le nom de son professeur ».

En utilisant le système complet d'événements associé à X , et avec la formule des probabilités totales, on sait que la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} P(X = n) P_{[X=n]}(T)$ converge.

De plus,

$$\begin{aligned}
P(T) &= \sum_{n=1}^{+\infty} P(X = n)P_{[X=n]}(T), \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} (1-p)^{n-1} p \times p^{n-1}, \\
&= p \sum_{n=1}^{+\infty} (p(1-p))^{n-1}, \\
&= p \sum_{l=0}^{+\infty} (p(1-p))^l, \text{ (en posant } l = n - 1 \text{)} \\
&= p \frac{1}{1-p(1-p)}, \\
&= \frac{p}{1-p+p^2}.
\end{aligned}$$

Ainsi $P(T) = \frac{p}{1-p+p^2}$.

3. (a) $Y \hookrightarrow \mathcal{B}\left(43, \frac{p}{1-p+p^2}\right)$ car on compte le nombre de succès (l'élève dévoile le nom de son professeur) lors d'une répétition de 43 épreuves (un élève se fait attaquer et questionner par des ninjas) identiques et indépendantes dont la probabilité de succès est $\frac{p}{1-p+p^2}$.

(b) On demande de calculer $P(Y = 0)$, par la question précédente, on a

$$\begin{aligned}
P(Y = 0) &= \binom{43}{0} \left(\frac{p}{1-p+p^2}\right)^0 \left(1 - \frac{p}{1-p+p^2}\right)^{43}, \\
&= \left(\frac{1-p+p^2-p}{1-p+p^2}\right)^{43}, \\
&= \left(\frac{1-2p+p^2}{1-p+p^2}\right)^{43}.
\end{aligned}$$

Finalement,

$$P(Y = 0) = \left(\frac{1-2p+p^2}{1-p+p^2}\right)^{43}.$$