TD 18

Extrait d'évaluation 2023

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est un espace probabilisé. Soit $p \in]0,1[$ et $q = 1-p$.

Un constructeur propose à sa clientèle deux types d'avions : un bimoteur équipé de deux moteurs et un quadrimoteur équipé de quatre moteurs.

On suppose que chacun des moteurs d'un avion peut tomber en panne indépendamment des autres avec la probabilité q lors d'un vol indépendamment des précédents vols.

Partie A : On considère un bimoteur et un quadrimoteur effectuant un vol. Au début du vol, tous leurs moteurs sont en état de fonctionnement. On note X le nombre de moteurs du bimoteur qui tombent en panne pendant ce vol, et Y le nombre de moteurs du quadrimoteur qui tombent en panne pendant ce vol.

1. Justifier que $X \hookrightarrow \mathcal{B}(2,q)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(4,q)$.

2. Un avion peut finir son vol si au moins la moitié de ses moteurs fonctionne.

   (a) Déterminer la probabilité que le bimoteur finisse son vol en fonction de q.

   (b) Déterminer la probabilité que le quadrimoteur finisse son vol en fonction de q.

   (c) Montrer que $P(X \leq 1) - P(Y \leq 2) = (1-q)q^2(3q-1)$.

   (d) En déduire que le bimoteur est strictement plus sûr que le quadrimoteur si et seulement si $q \in \left]\frac{1}{3}, 1\right[$.

Partie B : On ne s'intéresse plus ici qu'à un seul bimoteur. Cet avion vole une fois par jour tant que son nombre de moteurs le lui permet. L'avion n'est pas réparé d'un jour à l'autre. Si les deux moteurs de l'avion sont en panne, l'avion ne vole plus.

On note pour tout $n \in \mathbb{N}$, X_n la variable aléatoire réelle égale au nombre de moteurs qui fonctionnent encore après la n ème journée. On a $X_0 = 2$. On pose

$$A = \begin{pmatrix} 1 & q & q^2 \\ 0 & p & 2pq \\ 0 & 0 & p^2 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, U_n = \begin{pmatrix} P(X_n = 0) \\ P(X_n = 1) \\ P(X_n = 2) \end{pmatrix}.$$

3. Donner, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ le support de X_n.

4. (a) Donner la loi de X_1.

   (b) Montrer que $P(X_2 = 0) = q^2 + 2pq^2 + p^2q^2$.

5. (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, U_{n+1} = AU_n$.
   On admet que le résultat est encore vrai pour $n = 0$.

   (b) Écrire une fonction `f` en Python, qui prend en entrée un entier naturel n et un réel $p \in]0,1[$ et qui renvoie U_n.

   (c) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, U_n = A^n U_0$.

   (d) Calculer P^2.

   (e) Déterminer la matrice $D = PAP$. On pourra commencer par justifier que $PA = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -p & -2p \\ 0 & 0 & p^2 \end{pmatrix}$.

   (f) Montre que $\forall n \in \mathbb{N}, A^n = PD^nP$.

   (g) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la loi de X_n est donnée par

$$P(X_n = 0) = (1-p^n)^2, P(X_n = 1) = 2p^n - 2p^{2n} \text{ et } P(X_n = 2) = p^{2n}.$$

1. X est le nombre de succès (tomber en panne lors du vol) lors d'une répétition de deux épreuves (une pour chaque moteur) identiques et indépendantes de probabilité de succès q. Ainsi $\boxed{X \hookrightarrow \mathcal{B}(2,q)}$.

   De même pour le quadrimoteur, $\boxed{Y \hookrightarrow \mathcal{B}(4,q)}$.

2. (a) On demande de calculer $P(X \leq 1)$. On a

$$\begin{aligned} P(X \leq 1) &= 1 - P(X = 2), \\ &= 1 - \binom{2}{2} q^2 (1-q)^0, \text{ par 1}, \\ &= 1 - q^2. \end{aligned}$$

   Ainsi $\boxed{P(X \leq 1) = 1 - q^2.}$

   (b) On demande de calculer $P(Y \leq 2)$. On a

$$\begin{aligned} P(Y \leq 2) &= P(Y = 0) + P(Y = 1) + P(Y = 2), \\ &= \binom{4}{0} q^0 (1-q)^4 + \binom{4}{1} q^1 (1-q)^3 + \binom{4}{2} q^2 (1-q)^2, \text{ par 1}, \\ &= (1-q)^2 \left((1-q)^2 + 4q(1-q) + 6q^2 \right), \\ &= (1-q)^2 \left(1 - 2q + q^2 + 4q - 4q^2 + 6q^2 \right), \\ &= (1-q)^2 \left(1 + 2q + 3q^2 \right). \end{aligned}$$

   Ainsi $\boxed{P(Y \leq 2) = (1-q)^2 \left(1 + 2q + 3q^2\right).}$

   (c) Par les questions 2.a et 2.b,

$$\begin{aligned} P(X \leq 1) - P(Y \leq 2) &= 1 - q^2 - (1-q)^2 \left(1 + 2q + 3q^2\right), \\ &= (1-q)(1+q) - (1-q)^2 \left(1 + 2q + 3q^2\right), \\ &= (1-q) \left(1 + q - (1-q)\left(1 + 2q + 3q^2\right)\right), \\ &= (1-q) \left(1 + q - 1 - 2q - 3q^2 + q + 2q^2 + 3q^3\right), \\ &= (1-q) \left(-q^2 + 3q^3\right), \\ &= (1-q) q^2 (3q - 1). \end{aligned}$$

   Ainsi, $\boxed{P(X \leq 1) - P(Y \leq 2) = (1-q)q^2(3q-1).}$

   (d) Le bimoteur est strictement plus sûr que le quadrimoteur si et seulement si $P(X \leq 1) > P(Y \leq 2)$, or par la question 2.c $P(X \leq 1) - P(Y \leq 2) = (1-q)q^2(3q-1)$.

q	0		$\frac{1}{3}$		1
$1-q$	||	$+$		$+$	||
q^2	||	$+$		$+$	||
$3q-1$	||	$-$	0	$+$	||
$(1-q)q^2(3q-1)$	||	$-$	0	$+$	||

Ainsi, le bimoteur est strictement plus sûr que le quadrimoteur si et seulement si $q \in \left]\frac{1}{3}, 1\right[$.

3. L'avion a initialement 2 moteurs, mais par l'énoncé il peut en perdre 0,1 ou 2 pendant un seul vol, ainsi,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, X_n(\Omega) = \{0, 1, 2\}.}$$

4. (a) Par la question 1 :

$$\begin{array}{rcl} P(X_1 = 2) & = & \binom{2}{0} q^0 (1-q)^2, \\ & = & p^2. \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} P(X_1 = 1) & = & \binom{2}{1} q^1 (1-q)^1, \\ & = & 2pq. \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} P(X_1 = 0) & = & \binom{2}{2} q^2 (1-q)^0, \\ & = & q^2. \end{array}$$

Ainsi, on a :

k	0	1	2
$P(X_1 = k)$	q^2	$2pq$	p^2

(b) On utilise la formule des probabilités totales avec le système complet d'événement associé à X_1. On a, à l'aide de la question 1 et de la question 4.a,

$$\begin{array}{rcl} P(X_2 = 0) & = & P(X_1 = 0)P_{[X_1=0]}(X_2 = 0) + P(X_1 = 1)P_{[X_1=1]}(X_2 = 0) + P(X_1 = 2)P_{[X_1=2]}(X_2 = 0), \\ & = & q^2 \times 1 + 2pq \times q + p^2 \times q^2, \\ & = & q^2 + 2pq^2 + p^2q^2. \end{array}$$

Ainsi, $\boxed{P(X_2 = 0) = q^2 + 2pq^2 + p^2q^2.}$

5. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par la question 1, on a

$P_{[X_n=k]}(X_{n+1} = \ell)$	$\ell = 0$	$\ell = 1$	$\ell = 2$
$k = 0$	1	0	0
$k = 1$	q	p	0
$k = 2$	q^2	$2pq$	p^2

En appliquant la formule des probabilités totales avec de système complet d'évènements associé à X_n,

$$\begin{aligned}
& U_{n+1} \\
= & \begin{pmatrix} P(X_{n+1}=0) \\ P(X_{n+1}=1) \\ P(X_{n+1}=2) \end{pmatrix}, \\
= & \begin{pmatrix} P(X_n=0)P_{[X_n=0]}(X_{n+1}=0) + P(X_n=1)P_{[X_n=1]}(X_{n+1}=0) + P(X_n=2)P_{[X_n=2]}(X_{n+1}=0) \\ P(X_n=0)P_{[X_n=0]}(X_{n+1}=1) + P(X_n=1)P_{[X_n=1]}(X_{n+1}=1) + P(X_n=2)P_{[X_n=2]}(X_{n+1}=1) \\ P(X_n=0)P_{[X_n=0]}(X_{n+1}=2) + P(X_n=1)P_{[X_n=1]}(X_{n+1}=2) + P(X_n=2)P_{[X_n=2]}(X_{n+1}=2) \end{pmatrix}, \\
= & \begin{pmatrix} P(X_n=0) + qP(X_n=1) + q^2P(X_n=2) \\ pP(X_n=1) + 2pqP(X_n=2) \\ p^2P(X_n=2) \end{pmatrix}, \\
= & \begin{pmatrix} 1 & q & q^2 \\ 0 & p & 2pq \\ 0 & 0 & p^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P(X_n=0) \\ P(X_n=1) \\ P(X_n=2) \end{pmatrix}, \\
= & AU_n.
\end{aligned}$$

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}^*, U_{n+1} = AU_n$.

(b) Par la question précédente, on peut écrire

```python
import numpy as np

def f(n,p):
  A = np.array([[1,1-p,(1-p)**2],[0,p,2*p*(1-p)],[0,0,p**2]])
  U = np.array([[0],[0],[1]])
  for i in range(n):
    U = np.dot(A,U)
  return U
```

(c) Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$: « $U_n = A^n U_0$ ».

Initialisation : Montrons $\mathcal{P}(0)$.

$A^0 U_0 = U_0$, d'où $\mathcal{P}(0)$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose $\mathcal{P}(n)$, montrons $\mathcal{P}(n+1)$.

$$\begin{array}{rrcl}
\text{Par les questions 5.a et 5.b} & U_{n+1} & = & AU_n, \\
\text{donc par hypothèse de récurrence} & U_{n+1} & = & A \times A^n U_0., \\
\text{ainsi} & U_{n+1} & = & A^{n+1} U_0.
\end{array}$$

D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

Par le principe de récurrence on a $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, U_n = A^n U_0.}$

(d) On a

$$\begin{aligned}
P^2 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{P^2 = I_3.}$

(e) On a

$$
\begin{aligned}
D &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & q & q^2 \\ 0 & p & 2pq \\ 0 & 0 & p^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\
&= \begin{pmatrix} 1 & p+q & (q+p)^2 \\ 0 & -p & -2p(p+q) \\ 0 & 0 & p^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -p & -2p \\ 0 & 0 & p^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p^2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Ainsi, $\boxed{D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p^2 \end{pmatrix}.}$

(f) Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$: « $A^n = PD^nP$ ».
INITIALISATION : Montrons $\mathcal{P}(0)$.
$PD^0P = I_2$ par 5.d et $A^0 = I_2$, donc $A^0 = PD^0P$. D'où $\mathcal{P}(0)$.
HÉRÉDITÉ : Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose $\mathcal{P}(n)$, montrons $\mathcal{P}(n+1)$.
Par ce qui précède $D = PAP$, donc $A = PDP$, car $P^2 = I_3$. Ainsi

$$
\begin{aligned}
A^{n+1} &= A^n \times A, \\
&= A^n PDP, \\
&= PD^nPPDP, \text{ par hypothèse de récurrence} \\
&= PD^nDP, \text{ par 5.d,} \\
&= PD^{n+1}P.
\end{aligned}
$$

D'où $\mathcal{P}(n+1)$.
Par le principe de récurrence on a $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, A^n = PD^nP.}$

(g) Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$
\begin{aligned}
U_n &= A^nU_0, \text{ par 5.c} \\
&= PD^nPU_0, \text{ par 5.f} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & p^n & 0 \\ 0 & 0 & p^{2n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \\
&= \begin{pmatrix} 1 & p^n & p^{2n} \\ 0 & -p^n & -2p^{2n} \\ 0 & 0 & p^{2n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \\
&= \begin{pmatrix} 1 - 2p^n + p^{2n} \\ 2p^n - 2p^{2n} \\ p^{2n} \end{pmatrix}, \\
&= \begin{pmatrix} (1-p^n)^2 \\ 2p^n - 2p^{2n} \\ p^{2n} \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Ainsi, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, P(X_n = 0) = (1-p^n)^2, P(X_n = 1) = 2p^n - 2p^{2n} \text{ et } P(X_n = 2) = p^{2n}.}$