DS 04

Correction

Exercice 1

1. Les répétitions sont impossibles et on ne tient pas compte de l'ordre, donc le nombre de façons différentes de piocher simultanément 3 boules parmi les 10 boules est $\binom{10}{3}$.

$$\begin{aligned}\binom{10}{3} &= \frac{10\times 9\times 8}{1\times 2\times 3},\\ &= 10\times 3\times 4,\\ &= 120.\end{aligned}$$

Ainsi il y a $\boxed{\text{120 façons piocher simultanément de sélectionner 3 boules parmi les 10 boules.}}$

2. (a) Même situation que la question précédente, mais on doit obligatoirement prendre la boule 8 et sélectionner les deux autres boules parmi les 7 premières boules, donc le nombre de façons différentes de piocher simultanément 3 boules parmi lesquelles la plus grande est la numéro 8 est $\binom{7}{2}$.

$$\begin{aligned}\binom{7}{2} &= \frac{7\times 6}{1\times 2},\\ &= 7\times 3,\\ &= 21\end{aligned}$$

Ainsi il y a $\boxed{\text{21 façons différentes}}$ de piocher simultanément 3 boules parmi lesquelles la plus grande est la numéro 8 .

(b) Même raisonnement que la question précédente en remplaçant 8 par k et 7 par $k-1$, donc, le nombre de façons différentes de piocher simultanément 3 boules parmi lesquelles la plus grande est la numéro k est $\boxed{\binom{k-1}{2}.}$

(c) Lorsque l'on choisit 3 boules différentes parmi les 10 boules, on en choisit 3 avec la plus grande étant la boule 3, ou la boule 4, ..., ou la boule 10. Ainsi par les questions précédentes :

$$\begin{aligned}\binom{10}{3} &= \sum_{k=3}^{10}\binom{k-1}{2},\\ &= \sum_{\ell=2}^{9}\binom{\ell}{2},\ \text{en posant } \ell = k-1.\end{aligned}$$

Finalement, $\boxed{\sum_{\ell=2}^{9}\binom{\ell}{2} = \binom{10}{3}\ .}$

3. (a) Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, avec $n \geq 2$, $\mathcal{P}(n)$: « $\displaystyle\sum_{\ell=2}^{n} \binom{\ell}{2} = \binom{n+1}{3}$ » .

   Initialisation : On a $\displaystyle\binom{2+1}{3} = 1$ et $\displaystyle\sum_{\ell=2}^{2} \binom{\ell}{2} = \binom{2}{2} = 1$, donc $\displaystyle\binom{2+1}{3} = \sum_{\ell=2}^{2} \binom{\ell}{2}$, d'où $\mathcal{P}(2)$.

   Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, avec $n \geq 2$, on suppose $\mathcal{P}(n)$ et on montre $\mathcal{P}(n+1)$.

$$\begin{aligned}\sum_{\ell=2}^{n+1} \binom{\ell}{2} &= \binom{n+1}{2} + \sum_{\ell=2}^{n} \binom{\ell}{2},\\ &= \binom{n+1}{2} + \binom{n+1}{3}, \text{ par hypothèse de récurrence}\\ &= \binom{n+2}{3}, \text{ triangle de Pascal,}\end{aligned}$$

   d'où $\mathcal{P}(n+1)$.

   Finalement, par le principe de récurrence, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \text{ avec } n \geq 2, \displaystyle\sum_{\ell=2}^{n} \binom{\ell}{2} = \binom{n+1}{3}.}$

   (b) On tape

```
somme = 0

for l in range(2,n+1):
  somme = somme + l*(l-1)/2

print(somme - (n+1)*n*(n-1)/3)
```

Exercice 2

1. (a) On a

$$\begin{aligned}f\left(\frac{1}{2}\right) &= \left(\frac{1}{2}\right)^2,\\ &= \frac{1}{4}.\end{aligned} \qquad \begin{aligned}f(1) &= (1)^{\frac{1}{1}},\\ &= 1.\end{aligned}$$

   Ainsi, $\boxed{f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} \text{ et } f(1) = 1.}$

   (b) On écrit

```
def f(x):
  return x**(1/x)

print(f(0.5))
print(f(1))
```

   (c) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\begin{array}{rrcl} f(x) = 1 & \Leftrightarrow \exp\left(\dfrac{\ln(x)}{x}\right) & = & 1, \\ & \Leftrightarrow \dfrac{\ln(x)}{x} & = & 0, \\ & \Leftrightarrow \ln(x) & = & 0, \\ & \Leftrightarrow x & = & 1. \end{array}$$

Ainsi, $\boxed{\text{1 admet 1 comme unique antécédent par la fonction } f.}$

2. (a) On a $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f(x) = \exp\left(\dfrac{\ln(x)}{x}\right)$, donc

x	0	$+\infty$
$f(x)$	$\|$	$+$

(b) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

$$\begin{array}{rrcl} & g(x) & = & 0, \\ \Leftrightarrow & f(x) - 1 & = & 0, \\ \Leftrightarrow & f(x) & = & 1, \\ \Leftrightarrow & x & = & 1, \text{ par la question 1.c.} \end{array}$$

$$\begin{array}{rrcl} & g(x) & > & 0, \\ \Leftrightarrow & f(x) - 1 & > & 0, \\ \Leftrightarrow & f(x) & > & 1, \\ \Leftrightarrow & \exp\left(\dfrac{\ln(x)}{x}\right) & > & 1, \\ \Leftrightarrow & \dfrac{\ln(x)}{x} & > & 0, \text{ par stricte croissance de exp et ln} \\ \Leftrightarrow & \ln(x) & > & 0, \text{ car } x > 0 \\ \Leftrightarrow & x & > & 1, \text{ par stricte croissance de exp et ln.} \end{array}$$

On a donc

x	0		1		$+\infty$
$g(x)$	$\|$	$-$	0	$+$	

(c) On a $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\ln(x)}{x} = -\infty$ et par les croissances comparées, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$, ainsi :

$$\begin{array}{rcl} \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) & = & \lim\limits_{x \to 0^+} \exp\left(\dfrac{\ln(x)}{x}\right), \\ & = & 0. \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) & = & \lim\limits_{x \to +\infty} \exp\left(\dfrac{\ln(x)}{x}\right), \\ & = & 1. \end{array}$$

Finalement, $\boxed{\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0 \text{ et } \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1.}$

(d) On a $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f(x) = \exp\left(\dfrac{\ln(x)}{x}\right)$.

- $x \to \dfrac{\ln(x)}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme quotients de fonction dérivables (ln et polynomiale).
- exp est dérivable sur $\mathbb{R}$.
- $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \dfrac{\ln(x)}{x} \in \mathbb{R}$.

Ainsi, f est dérivable et donc continue. De plus par la question 2.c, f admet une limite finie en 0, donc f est prolongeable par continuité à $\mathbb{R}^+$.

3. (a) On sait par la question 2.d que $\boxed{f \text{ est dérivable.}}$

   (b) On a $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f(x) = \exp\left(\dfrac{\ln(x)}{x}\right)$, et par la question 3.a, f est dérivable. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln(x) \times 1}{x^2} \exp\left(\frac{\ln(x)}{x}\right), \\ &= \frac{1-\ln(x)}{x^2} \exp\left(\frac{\ln(x)}{x}\right). \end{aligned}$$

   Finalement, $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f'(x) = \dfrac{1-\ln(x)}{x^2} \exp\left(\dfrac{\ln(x)}{x}\right).}$

   (c) Par les questions 3.a et 3.b, f est dérivable et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f'(x) = \dfrac{1-\ln(x)}{x^2} \exp\left(\dfrac{\ln(x)}{x}\right)$. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\begin{aligned} & 1-\ln(x) = 0, \\ \Leftrightarrow \quad & 1 = \ln(x), \\ \Leftrightarrow \quad & e = x. \end{aligned} \qquad \begin{aligned} & 1-\ln(x) > 0, \\ \Leftrightarrow \quad & 1 > \ln(x), \\ \Leftrightarrow \quad & e > x, \text{(stricte croissance de exp et ln)}. \end{aligned}$$

   On a donc

x	0		e		$+\infty$
$1-\ln(x)$	‖	$+$	0	$-$	
x^2	‖	$+$		$+$	
$\exp\left(\frac{\ln(x)}{x}\right)$	‖	$+$		$+$	
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ 0	$\nearrow$	$e^{\frac{1}{e}}$	$\searrow$	1

   (d) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. On pose $X = \dfrac{\ln(x)}{x}$. On a $\lim\limits_{x \to 0^+} X = -\infty$. Donc

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0^+} \left(\frac{\ln(x)}{x}\right)^2 \exp\left(\frac{\ln(x)}{x}\right) &= \lim_{X \to -\infty} X^2 e^X, \\ &= 0, \text{ par croissances comparées.} \end{aligned}$$

   Ainsi, $\boxed{\lim\limits_{x \to 0^+} \left(\dfrac{\ln(x)}{x}\right)^2 \exp\left(\dfrac{\ln(x)}{x}\right) = 0.}$

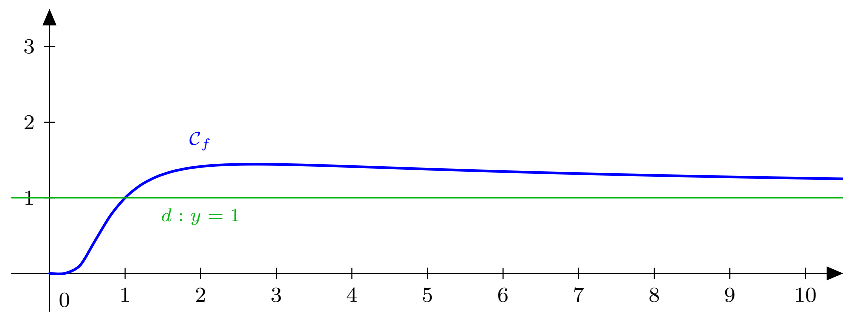
(e) On a

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+} f'(x) &= \lim_{x\to 0^+} \frac{1-\ln(x)}{x^2}\exp\left(\frac{\ln(x)}{x}\right), \text{ par 3.b} \\
&= \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{\ln(x)} - 1\right)\frac{1}{\ln(x)}\left(\frac{\ln(x)}{x}\right)^2 \exp\left(\frac{\ln(x)}{x}\right), \\
&= 0.
\end{aligned}$$

En effet $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{\ln(x)} = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\frac{\ln(x)}{x}\right)^2 \exp\left(\frac{\ln(x)}{x}\right) = 0$ par 3.d.

Finalement, $\boxed{f' \text{ admet une limite en } 0^+ \text{ et } \lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = 0.}$

4. À l'aide des questions 2.c, 3.c et 3.e on a



Exercice 3

1. (a) On a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} &= \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\right) - \binom{n}{0}, \\
&= 2^n - 1, \text{ par le binôme de Newton.}
\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} = 2^n - 1.}$

(b) On a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k &= (2+1)^n, \text{ par le binôme de Newton} \\
&= 3^n.
\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k = 3^n.}$

(c) On a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^{k-1} &= \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^k, \\
&= \frac{1}{3} \times (3+1)^n, \text{ par le binôme de Newton} \\
&= \frac{4^n}{3}.
\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}3^{k-1}=\frac{4^n}{3}.}$

(d) On a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}2^k3^{k-1} &= \frac{1}{3}\left(\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}6^k\right),\\
&= \frac{1}{3}\left(\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}6^k\right)-\binom{n}{0}(-1)^n6^0\right),\\
&= \frac{1}{3}\left((-1+6)^n-(-1)^n\right),\ \text{par le binôme de Newton}\\
&= \frac{5^n-(-1)^n}{3}.
\end{aligned}$$

Finalement,

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}2^k3^{k-1}=\frac{5^n-(-1)^n}{3}.}$$

2. (a) On a

$$\begin{aligned}
(A-5I)(A+I)^2 &= \begin{pmatrix}-4&2&2\\2&-4&2\\2&2&-4\end{pmatrix}(2J)^2,\\
&= 4\begin{pmatrix}-4&2&2\\2&-4&2\\2&2&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix},\\
&= 4\begin{pmatrix}-4&2&2\\2&-4&2\\2&2&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&3&3\\3&3&3\\3&3&3\end{pmatrix},\\
&= \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Finalement, $\boxed{(A-5I)(A+I)^2=0_3.}$

(b) Par la question 2.a

$$\begin{aligned}
& (A-5I)(A+I)^2 &= 0_3,\\
\text{donc}\quad & (A-5I)(A^2+2A+I) &= 0_3,\ \text{car } A \text{ et } I \text{ commutent}\\
\text{donc}\quad & A^3-3A^2-9A-5I &= 0_3,\\
\text{donc}\quad & (A^2-3A-9I)A &= 5I,\\
\text{donc}\quad & \frac{1}{5}(A^2-3A-9I)A &= I.
\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{A \text{ est inversible et } A^{-1}=\frac{1}{5}(A^2-3A-9I).}$

(c) Supposons par l'absurde que $A-5I$ est inversible. On sait que

$$\begin{array}{lrcl} & (A-5I)(A+I)^2 & = & 0_3,\ \text{par 2.a} \\ \text{donc} & (A+I)^2 & = & 0_3,\ \text{car } A \text{ et } I \text{ commutent} \\ \text{donc} & (2J)^2 & = & 0_3, \\ \text{donc} & \begin{pmatrix} 12 & 12 & 12 \\ 12 & 12 & 12 \\ 12 & 12 & 12 \end{pmatrix} & = & 0_3,\ \text{contradiction.} \end{array}$$

Finalement, $\boxed{A-5I \text{ n'est pas inversible.}}$

3. (a) Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} A = aI + bJ \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & b & b \\ b & a+b & b \\ b & b & a+b \end{pmatrix}, \\ &\Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} a+b & = & 1, \\ b & = & 2, \end{array} \right. \\ &\Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} a & = & -1, \\ b & = & 2. \end{array} \right. \end{aligned}$$

En particulier $\boxed{A = -I + 2J.}$

(b) Montrons par récurrence que $\forall k \in \mathbb{N}^*, \mathcal{P}(k),$: « $J^k = 3^{k-1} J$ ».
Initialisation : On a $3^{1-1} J = J^1$, d'où $\mathcal{P}(1)$.
Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}^*$, on suppose $\mathcal{P}(k)$ et on montre $\mathcal{P}(k+1)$.

$$\begin{aligned} J^{k+1} &= J^k \times J, \\ &= 3^{k-1} J^2,\ \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= 3^k J,\ \text{par les calculs de 2.a, } J^2 = 3J. \end{aligned}$$

D'où $\mathcal{P}(k+1)$.

Finalement, par le principe de récurrence, $\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*, J^k = 3^{k-1} J.}$

(c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} (2J)^k &= \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} 2^k J^k, \\ &= \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} 2^k 3^{k-1} J,\ \text{par 3.b} \\ &= \frac{5^n - (-1)^n}{3} J,\ \text{par 1.d.} \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} (2J)^k = \frac{5^n - (-1)^n}{3} J.}$

(d) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $-I \times 2J = -2J$ et $2J \times (-I) = -2J$, donc $-I \times 2J = 2J \times (-I)$, ainsi $-I$ et $2J$ commutent.

$$\begin{aligned}
A^n &= (-I+2J)^n, \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-I)^{n-k} (2J)^k, \text{ par le binôme de Newton} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} (2J)^k, \\
&= \binom{n}{0} (-1)^{n-0} (2J)^0 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} (2J)^k, \\
&= (-1)^n I + \frac{5^n - (-1)^n}{3} J, \text{par 3.c.}
\end{aligned}$$

Finalement,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, A^n = (-1)^n I + \frac{5^n - (-1)^n}{3} J.}$$

(e) On a $(-1)^0 I + \dfrac{5^0 - (-1)^0}{3} J = I$ et $A^0 = I$, donc $\boxed{\text{la formule est valide pour } n = 0.}$

$$\begin{aligned}
\left((-1)^{-1} I + \frac{5^{-1} - (-1)^{-1}}{3} J\right) A &= \left(-I + \frac{2}{5} J\right)(-I+2J), \text{ par 3.4} \\
&= I - 2J - \frac{2}{5} J + \frac{4}{5} J^2, \\
&= I + \left(-2 - \frac{2}{5} + \frac{12}{5}\right) J, \text{ car } J^2 = 3J \\
&= I.
\end{aligned}$$

Ainsi, A est inversible et $A^{-1} = \left((-1)^{-1} I + \dfrac{5^{-1} - (-1)^{-1}}{3} J\right)$, donc $\boxed{\text{la formule est valide pour } n = -1.}$

4. (a) Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^n, \mathcal{P}(n),$: « $A^n X_0$ ».
INITIALISATION : On a $A^0 X_0 = X_0$, d'où $\mathcal{P}(0)$.
HÉRÉDITÉ : Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose $\mathcal{P}(n)$ et on montre $\mathcal{P}(n+1)$.

$$\begin{aligned}
A^{n+1} X_0 &= A \times A^n X_0, \\
&= A X_n, \text{ par hypothèse de récurrence} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}, \\
&= \begin{pmatrix} u_n + 2v_n + 2w_n \\ 2u_n + v_n + 2w_n \\ 2u_n + 2v_n + w_n \end{pmatrix}, \\
&= \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix}, \\
&= X_{n+1}.
\end{aligned}$$

D'où $\mathcal{P}(n+1)$.
Finalement, par le principe de récurrence, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, X_n = A^n X_0.}$

(b) On écrit

```python
import numpy as np
import numpy.linalg as la

def X(n):
  A = np.array([[1,2,2],[2,1,2],[2,2,1]])
  X_0 = np.array([[0],[1],[2]])
  return np.dot( la.matrix_power(A,n) , X_0)
```

(c) Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{array}{rcl} X_n & = & A^n X_0, \\ & = & \left((-1)^n I + \dfrac{5^n - (-1)^n}{3} J\right) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \text{ par 4.e et 4.f} \\ & = & (-1)^n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + (5^n - (-1)^n) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \\ & = & \begin{pmatrix} 5^n - (-1)^n \\ 5^n \\ 5^n + (-1)^n \end{pmatrix}. \end{array}$$

Ainsi, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 5^n - (-1)^n, v_n = 5^n \text{ et } w_n = 5^n + (-1)^n.}$