DS 05

Correction

Exercice 1

1. On sait que chaque jour Bilal utilise le vélo ou le bus mais pas les deux en même temps, ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}, (V_n, B_n)$ est un système complet d'évènements. On a donc par les probabilités totales :

$$\begin{aligned} v_1 &= P(V_1), \\ &= P(V_1 \cap V_0) + P(V_1 \cap B_0), \text{ avec le système complet d'évènement } (V_0, B_0) \\ &= P(V_0)P_{V_0}(V_1), \text{ car Bilal ne prend pas le bus le jour 0} \\ &= 1 \times (1-p), \\ &= 1-p. \end{aligned}$$

De plus , avec le système complet d'évènements (V_1, B_1), $v_1 + b_1 = 1$, donc $b_1 = p$.

Toujours avec les probabilités totales :

$$\begin{aligned} v_2 &= P(V_2), \\ &= P(V_1)P_{V_1}(V_2) + P(B_1)P_{B_1}(V_2), \text{ avec le système complet d'évènements } (V_1, B_1) \\ &= (1-p)(1-p) + p \times p, \\ &= 1 - 2p + 2p^2. \end{aligned}$$

De plus, avec le système complet d'évènement (V_2, B_2), $v_2 + b_2 = 1$, donc $b_1 = 2p - 2p^2$.

Finalement, $\boxed{v_1 = 1-p,\ v_2 = 1-2p+2p^2,\ b_1 = p \text{ et } b_2 = 2p-2p^2.}$

2. On a

$$\begin{aligned} P_{V_2}(B_1) &= \frac{P(B_1)P_{B_1}(V_2)}{P(V_2)}, \text{ par la formule de Bayes} \\ &= \frac{p \times p}{1-2p+2p^2}, \text{ par 1} \\ &= \frac{p^2}{1-2p+2p^2}. \end{aligned}$$

Ainsi, sachant que Bilal a utilisé son vélo le jour 2, la probabilité qu'il ait pris le bus la jour 1 est $\boxed{P_{V_2}(B_1) = \frac{p^2}{1-2p+2p^2}.}$

3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par la formule des probabilités totales avec le système complet d'évènements (V_n, B_n) :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= P(V_{n+1}), \\ &= P(V_n)P_{V_n}(V_{n+1}) + P(B_n)P_{B_n}(V_{n+1}), \\ &= v_n(1-p) + b_n p, \\ &= v_n(1-p) + (1-v_n)p, \\ &= (1-2p)v_n + p. \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, v_{n+1} = (1-2p)v_n + p.}$

(b) On a

$$\begin{array}{rcl} (1-2p)v_0 + p & = & (1-2p) \times 1 + p, \\ & = & 1-p, \\ & = & v_1, \text{ par 1.} \end{array}$$

$\boxed{\text{La formules est donc encore vraie pour } n = 0.}$

4. (a) $1-2p = 1 \Leftrightarrow p = 0$, or $p \neq 0$, ainsi, d'après la question 3, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est arithmético-géométrique. On a

$$\begin{array}{rrcccl} & 0 & < & p & < & 1, \\ \text{donc} & -2 & < & -2p & < & 0, \\ \text{donc} & -1 & < & 1-2p & < & 1. \end{array}$$

Comme $1-2p \in]-1,1[$, par la question 3, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers son point fixe. Soit $\ell \in \mathbb{R}$,

$$\begin{array}{rrcl} & \ell & = & (1-2p)\ell + p, \\ \Leftrightarrow & 2p\ell & = & p, \\ \Leftrightarrow & \ell & = & \frac{1}{2}, \text{ car } p \neq 0. \end{array}$$

Finalement, $\boxed{(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge vers } \frac{1}{2}.}$

(b) On a justifié que $\forall n \in \mathbb{N}, (V_n, B_n)$ est un système complet d'évènements, donc $\forall n \in \mathbb{N}, v_n + b_n = 1$, d'où

$$\forall n \in \mathbb{N}, b_n = 1 - v_n.$$

Ainsi,

$$\begin{array}{rcl} \lim\limits_{n\to+\infty} b_n & = & \lim\limits_{n\to+\infty} 1 - v_n, \\ & = & 1 - \frac{1}{2}, \text{par 4.a} \\ & = & \frac{1}{2}. \end{array}$$

Finalement, $\boxed{(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge et sa limite est } \frac{1}{2}.}$

Exercice 2

1. On suppose par l'absurde que $a \leq b$. Comme f est strictement décroissante sur I, $(a,b) \in I^2$, et $a \leq b$ alors $f(a) \geq f(b)$. Or on a $f(a) < f(b)$. Contradiction. Ainsi $\boxed{a > b}$.

2. (a) ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ donc $x \mapsto n\ln(x)$ aussi. Ainsi f_n est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme différence de fonctions dérivables (polynomiale et $x \mapsto n\ln(x)$). Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\begin{array}{rcl} f_n'(x) & = & 1 - \frac{n}{x}, \\ & = & \frac{x-n}{x}, \end{array}$$

donc, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f_n'(x) = \dfrac{x-n}{x}.$

x	0		n		$+\infty$
$x-n$	||	$-$	0	$+$	
x	||	$+$		$+$	
$f_n'(x)$	||	$-$	0	$+$	
$f_n(x)$	|| $+\infty$	$\searrow$	$n(1-\ln(n))$	$\nearrow$	$+\infty$

On a $\lim\limits_{x\to 0} f_n(x) = +\infty$.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} f_n(x) &= \lim_{x\to+\infty} x - n\ln(x),\\ &= \lim_{x\to+\infty} x\left(1 - n\frac{\ln(x)}{x}\right),\\ &= +\infty,\ \text{par croissances comparées.}\end{aligned}$$

(b) On a $f_n(n) = n(1-\ln(n))$ donc

$$\begin{array}{ll} \text{si} & n \geq 3,\\ \text{alors} & n > e,\\ \text{donc} & \ln(n) > 1, \text{car ln strictement croissante}\\ \text{donc} & 0 > 1-\ln(n),\\ \text{donc} & 0 > n(1-\ln(n)),\ \text{car } n>0\\ \text{donc} & 0 > f_n(n). \end{array}$$

Ainsi $\boxed{\text{pour } n \geq 3,\ f_n(n) < 0.}$

(c) On suppose que $n \geq 3$. On a

- f_n est dérivable donc continue par 2.a.
- f_n est strictement décroissante sur $]0, n[$, par 2.a.
- $\lim\limits_{x\to 0} f_n(x) = +\infty$ par 2.a et $f_n(n) < 0$ par 2.b or comme f_n est continue, $\lim\limits_{x\to n} f_n(x) = f_n(n)$. Ainsi, $0 \in \left]\lim\limits_{x\to n} f_n(x), \lim\limits_{x\to 0} f_n(x)\right[$.

Ainsi, par le théorème de la bijection l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+^*, f_n(x) = 0$ admet exactement une solution dans $]0, n[$.

De même, $x \in \mathbb{R}_+^*, f_n(x) = 0$ admet exactement une solution dans $]n, +\infty[$.

Enfin, $f_n(n) \neq 0$ par 2.b.

Finalement, $\boxed{\text{pour } n \geq 3, \text{ l'équation d'inconnue } x \in \mathbb{R}_+^*, f_n(x) = 0 \text{ admet exactement deux solutions,}}$ une dans $]0, n[$ et l'autre dans $]n, +\infty[$.

3. D'après la question 2, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ avec $n \geq 3$, $n \leq v_n$. Or $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

   Finalement, $\boxed{(v_n)_{n\geq 3} \text{ diverge.}}$

4. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ avec $n \geq 3$.

$$\begin{aligned} f_n(1) &= 1 - n\ln(1), \\ &= 1. \end{aligned} \qquad \begin{aligned} f_n(e) &= e - n\ln(e), \\ &= e - n. \end{aligned}$$

Par définition $f_n(u_n) = 0$. Comme $n \geq 3$, on a $e - n < 0$. Ainsi $f_n(e) < f_n(u_n) < f_n(1)$.

Finalement, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \text{ avec } n \geq 3,\ f_n(e) < f_n(u_n) < f_n(1).}$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ avec $n \geq 3$. On sait que $f_n(e) < f_n(u_n) < f_n(1)$ par 3.a. Or 1, e et u_n sont des élément de $]0, n[$ et f_n est strictement décroissante sur $]0, n[$, donc par la question 1 :

$$1 < u_n < e.$$

Finalement, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \text{ avec } n \geq 3,\ 1 < u_n < e.}$

(c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ avec $n \geq 3$. $f_{n+1}(u_{n+1}) = 0$, donc $u_{n+1} = (n+1)\ln(u_{n+1})$. Ainsi,

$$\begin{aligned} f_n(u_{n+1}) &= u_{n+1} - n\ln(u_{n+1}), \\ &= (n+1)\ln(u_{n+1}) - n\ln(u_{n+1}), \\ &= \ln(u_{n+1}). \end{aligned}$$

Donc, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^* \text{ avec } n \geq 3,\ f_n(u_{n+1}) = \ln(u_{n+1}).}$

(d) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ avec $n \geq 3$. Par définition , $f_n(u_n) = 0$. Par la question 4.c $f_n(u_{n+1}) = \ln(u_{n+1})$. Or, par la question 4.b, $1 < u_{n+1}$. Comme ln est strictement croissante, $0 < \ln(u_{n+1})$. Ainsi $f_n(u_{n+1}) > f_n(u_n)$.

Finalement, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^* \text{ avec } n \geq 3,\ f_n(u_{n+1}) > f_n(u_n).}$

(e) Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 3$. Par la question 4.d, $f_n(u_{n+1}) < f_n(u_n)$. Or on sait par définition que u_{n+1} et u_n sont dans $]0, n[$, et d'après la question 2, f_n est strictement décroissante sur $]0, n[$. Donc par la question 1, $u_{n+1} < u_n$.

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ avec $n \geq 3, u_{n+1} < u_n$. Finalement, $\boxed{(u_n)_{n\geq 3} \text{ est décroissante.}}$

(f) Par définition $(u_n)_{n\geq 3}$ est minorée par 0, et d'après la question 4.e, $(u_n)_{n\geq 3}$ est décroissante. Ainsi par le théorème de la limite monotone $\boxed{(u_n)_{n\geq 3} \text{ converge.}}$

(g) On suppose par l'absurde que $\ell \neq 1$.

On sait, par la question 4.b que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ avec $n \geq 3, u_n > 1$. Ainsi, par passage à la limite, $\ell \geq 1$. On en déduite donc que

$$\lim_{n\to+\infty} \ln(u_n) = \ln(\ell) \in \mathbb{R}.$$

Or $\ell \neq 1$, donc $\ell > 1$, donc par stricte croissance de ln, $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(u_n) > 0$. On a donc

$$\lim_{n\to+\infty} n\ln(u_n) = +\infty.$$

De plus $\forall n \in \mathbb{N}^*$ avec $n \geq 3, u_n = n\ln(u_n)$. Donc par unicité de la limite $(u_n)_{n\geq 3}$ diverge vers $+\infty$, or pas la question 4.f, $(u_n)_{n\geq 3}$ converge. Contradiction.

Donc $\boxed{(u_n)_{n\geq 3} \text{ converge vers 1.}}$

Exercice 3

1. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{1}{\binom{n}{n}}, \\ &= 1. \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = 1.}$

(b) On a

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} S_n &= \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} u_k, \\
&= \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} 1, \text{ par 1.a} \\
&= \lim_{n\to+\infty} n, \\
&= +\infty.
\end{aligned}$$

On a donc $\boxed{\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty.}$

2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k+1}\right) &= \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k+2}{k+1}\right), \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(\ln(k+2) - \ln(k+1)\right), \\
&= \ln(n+2) - \ln(2), \text{ par télescopage.}
\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k+1}\right) = \ln(n+2) - \ln(2).}$

(b) On pose la fonction

$$f : \left\{ \begin{array}{rcl}]-1,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln(1+x) - x \end{array} \right.$$

- $x \mapsto 1+x$ est polynomiale donc dérivable sur $]-1,+\infty[$.
- $\ln$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
- $\forall x \in]-1,+\infty[, 1+x \in \mathbb{R}_+^*$.

Ainsi, $x \mapsto \ln(1+x)$ est dérivable sur $]-1,+\infty[$ et donc, f est dérivable comme différences de fonction dérivables ($x \mapsto \ln(1+x)$ et polynomiale).
Soit $x \in]-1,+\infty[$,

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{1+x} - 1, \\
&= \frac{-x}{1+x}.
\end{aligned}$$

Donc

x	-1		0		$+\infty$
$-x$	$\|$	$+$	0	$-$	
$1+x$	$\|$	$+$		$+$	
$f'(x)$	$\|$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\|$	$\nearrow$	0	$\searrow$	

Ainsi, $\forall x \in]-1,+\infty[, f(x) \leq 0$, donc $\boxed{\forall x \in]-1,+\infty[, \ln(1+x) \leq x.}$

(c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $k \in [\![1,n]\!]$. $k+1>0$ donc $\dfrac{1}{k+1} > 0$, ainsi par la question 2.b : $\ln\left(1+\dfrac{1}{k+1}\right) \leq \dfrac{1}{k+1}$. Par ailleurs

$$\begin{aligned} u_k &= \frac{1}{\binom{k+1}{k}}, \\ &= \frac{1}{k+1}. \end{aligned}$$

Finalement, $\forall k \in [\![1,n]\!], \ln\left(1+\dfrac{1}{k+1}\right) \leq u_k$. En sommant on obtient :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k+1}\right) &\leq \sum_{k=1}^{n} u_k, \\ \text{donc} \qquad \ln(n+2)-\ln(2) &\leq S_n, \text{ par 2.a.} \end{aligned}$$

Finalement, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \ln(n+2)-\ln(2) \leq S_n.}$

(d) Par la question 2.c, $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ln(n+2)-\ln(2) \leq S_n$, or $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(n+2)-\ln(2) = +\infty$, ainsi, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty.}$

3. (a) On a

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{\binom{1+p}{1}}, \\ &= \frac{1}{1+p}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_2 &= \frac{1}{\binom{2+p}{2}}, \\ &= \frac{1}{\frac{(p+2)(p+1)}{2}}, \\ &= \frac{2}{(p+2)(p+1)}. \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{u_1 = \dfrac{1}{1+p} \text{ et } u_2 = \dfrac{2}{(p+2)(p+1)}.}$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
(n+p+2)u_{n+2} &= \frac{n+p+2}{\binom{n+2+p}{n+2}}, \\
&= \frac{n+p+2}{\frac{n+2+p}{n+2}\binom{n+1+p}{n+1}}, \\
&= \frac{n+2}{\binom{n+1+p}{n+1}}, \\
&= (n+2)u_{n+1}.
\end{aligned}$$

Finalement, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, (n+p+2)u_{n+2} = (n+2)u_{n+1}.}$

(c) Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathcal{P}(n)$: « $S_n = \frac{1}{p-1}\left(1-(n+1+p)u_{n+1}\right)$ »

Initialisation : On a

$$\begin{aligned}
\frac{1}{p-1}\left(1-(1+1+p)u_{1+1}\right) &= \frac{1}{p-1}\left(1-(p+2)\frac{2}{(p+2)(p+1)}\right), \text{ par 3.a} \\
&= \frac{1}{p-1}\left(1-\frac{2}{p+1}\right), \\
&= \frac{1}{p-1} \times \frac{p-1}{p+1}, \\
&= \frac{1}{p+1}, \\
&= u_1 \text{ par 3.a}, \\
&= S_1.
\end{aligned}$$

d'où $\mathcal{P}(1)$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on suppose $\mathcal{P}(n)$ et on démontre $\mathcal{P}(n+1)$.

$$\begin{aligned}
S_{n+1} &= u_{n+1} + S_n, \\
&= u_{n+1} + \frac{1}{p-1}\left(1-(n+1+p)u_{n+1}\right), \text{par hypothèse de récurrence} \\
&= \frac{1}{p-1}\left(1-(n+1+p)u_{n+1} + (p-1)u_{n+1}\right), \\
&= \frac{1}{p-1}\left(1-(n+2)u_{n+1}\right), \\
&= \frac{1}{p-1}\left(1-(n+2+p)u_{n+2}\right), \text{ par 3.b}
\end{aligned}$$

d'où $\mathcal{P}(n+1)$.

Finalement, par le principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = \frac{1}{p-1}\left(1-(n+1+p)u_{n+1}\right)$.

4. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme $n \geq 0$, $\binom{n+p}{n} > 0$, donc $u_n > 0$. De plus comme $p \geq 2, n+p > 0$. Ainsi $v_n > 0$, en particulier $v_n \neq 0$.

$$\begin{aligned}
\frac{v_{n+1}}{v_n} &= \frac{(n+p+1)u_{n+1}}{(n+p)u_n}, \\
&= \frac{(n+p+1)\binom{n+p}{n}}{(n+p)\binom{n+p+1}{n+1}}, \\
&= \frac{(n+1)\binom{n+p+1}{n+1}}{(n+p)\binom{n+p+1}{n+1}}, \\
&= \frac{n+1}{n+p}.
\end{aligned}$$

Finalement, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n \neq 0 \text{ et } \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{n+1}{n+p}.}$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $p \geq 1$ donc $n+p \geq n+1 > 0$, donc $\frac{n+1}{n+p} \leq 1$. Ainsi, par la question 4.a

$$\begin{aligned}
\frac{v_{n+1}}{v_n} &\leq 1, \\
\text{donc} \quad v_{n+1} &\leq v_n, \text{ car } v_n > 0 \text{ (vu en 4.a).}
\end{aligned}$$

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_{n+1} \leq v_n$, donc $\boxed{v \text{ est décroissante.}}$

(c) On a montré en 4.a que $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n > 0$, donc v est minorée, de plus par 4.b, v est décroissante, donc par le théorème de la limite monotone, $\boxed{v \text{ converge.}}$

(d) D'après la question 3.c, $\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = \frac{1}{p-1}(1 - v_{n+1})$. Or par la question 4.c v converge vers ℓ, ainsi $(v_{n+1})_{n \in \mathbb{N}^*}$ aussi, finalement, S converge et

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} S_n = \frac{1-\ell}{p-1}.}$$

5. (a) On tape

```python
import numpy as np

def S(n,p):
    somme = 0
    for k in range(1,n+1):
        somme = somme + 1/np.math.comb(k+p,k)

    return somme
```

(b) Il semble que la limite de S pour $p = 5$ soit $\frac{1}{4}$, or la limite de S pour $p = 5$ est $\frac{1-\ell}{5-1}$ par la question 4.d.

$$\begin{aligned}
\frac{1-\ell}{5-1} &= \frac{1}{4}, \\
\Leftrightarrow \quad 1-\ell &= 1, \\
\Leftrightarrow \quad \ell &= 0.
\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\text{il semble que } \ell = 0.}$