DS 06

Correction

Exercice 1

1. (a) On a $\boxed{G = (\{1,2,3,4\}, \{(1,1),(1,2),(2,3),(3,4),(4,2)\}).}$

   (b) $\boxed{\deg(1) = 3,\ \deg(2) = 3,\ \deg(3) = 2,\ \deg(4) = 2 \text{ et } G \text{ a 5 arêtes.}}$

2. (a) On a $\boxed{M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.}$

   (b) On a

$$\begin{aligned} M^2 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} M^3 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

   Ainsi, $M^0 + M^1 + M^2 + M^3 = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Le coefficient en place (2,1) est nul, donc $\boxed{G \text{ n'est pas connexe.}}$

3. (a) On constate que $N^2 = 0_4$, ainsi

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, N^k = \begin{cases} I_4, & \text{si } k = 0, \\ N, & \text{si } k = 1, \\ 0_4, & \text{sinon.} \end{cases}}$$

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On constate que I_4 et N commutent.

$$\begin{aligned} \left(M^3\right)^n &= (I_4 + N)^n, \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k I_4^{n-k}, \text{par le binôme de Newton} \\ &= I_4 + nN, \text{ par la question 3.a} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & n & n & n \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Finalement, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \left(M^3\right)^n = \begin{pmatrix} 1 & n & n & n \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}.$

(c) On a

$$\begin{aligned} M^{101} &= \left(M^3\right)^{33} \times M^2, \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 33 & 33 & 33 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ par 3.b et 2.b} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 34 & 34 & 33 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Il y a donc 33 chemins de longueur 101 allant du sommet 1 au sommet 4.}}$

Exercice 2

1. g est dérivable comme somme et produit de fonctions dérivables (exp et polynomiales). On a $\forall x \in \mathbb{R}^+, g'(x) = xe^x - e^x + 1$
Ainsi, g' est dérivable comme somme et produit de fonctions dérivables (exp et polynomiales) et on a $\forall x \in \mathbb{R}^+, g''(x) = xe^x$.
On a donc

x	0		$+\infty$
x	0	$+$	
e^x		$+$	
$g''(x)$	0	$+$	
$g'(x)$	0	$\nearrow$	

x	0		$+\infty$
$g'(x)$	0	$+$	
$g(x)$	0	$\nearrow$	
$g(x)$	0	$+$	

Finalement, $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*, g(x) > 0.}$

2. (a) Il existe une fonction ε avec $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}, e^x = 1 + x + x\varepsilon(x)$. On a donc

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0^+} f(x) &= \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{e^x - 1}, \\ &= \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x + x\varepsilon(x)}, \\ &= \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{1 + 1\varepsilon(x)}, \\ &= 1, \\ &= f(0). \end{aligned}$$

Ainsi, f est continue en 0. De plus f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ comme somme et quotient de fonctions continues (exp et polynomiales), donc $\boxed{f \text{ est continue.}}$

(b) On a

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} &= \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{x}{e^x-1}-1}{x}, \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{x-(e^x-1)}{x(e^x-1)}, \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{x-(x+\frac{x^2}{2}+x^2\eta(x))}{x(x+x\varepsilon(x))}, \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}+\eta(x))}{1+\varepsilon(x)}, \\
&= -\frac{1}{2}\in\mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{f \text{ est dérivable en } 0 \text{ et que } f'(0)=-\dfrac{1}{2}.}$

(c) f est dérivable en 0 par la question 2.b et f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme somme et quotient de fonctions dérivables (exp et polynomiales). On a :

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R}^+, f'(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x-1-xe^x}{(e^x-1)^2} & \text{si } x\in\mathbb{R}_+^*, \\ -\dfrac{1}{2} & \text{sinon.}\end{cases}}$$

(d) À l'aide de la question 2.c :

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} f'(x) &= \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x-1-xe^x}{(e^x-1)^2}, \\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{xe^x}{(e^x)^2}\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{xe^x}-1}{\left(1-\frac{1}{e^x}\right)^2}, \\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{xe^x}-1}{\left(1-\frac{1}{e^x}\right)^2}, \\
&= 0,
\end{aligned}$$

car

- $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^x}=0$ par croissances comparées,
- $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=\lim_{x\to+\infty}\dfrac{1}{xe^x}=\lim_{x\to+\infty}\dfrac{1}{e^x}=0.$

Finalement, $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f'(x)=0.}$

(e) D'après la question 2.c, f' est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme somme, produit et quotient de fonction dérivables (exp et polynomiales). Soit $x\in\mathbb{R}_+^*$,

$$
\begin{aligned}
f''(x) &= \frac{(e^x - e^x - xe^x)(e^x-1)^2 - (e^x - 1 - xe^x)2e^x(e^x-1)}{(e^x-1)^4}, \\
&= \frac{-xe^x(e^x-1) - (e^x - 1 - xe^x)2e^x}{(e^x-1)^3}, \\
&= \frac{e^x}{(e^x-1)^3}\left(-xe^x + x - 2e^x + 2 + 2xe^x\right), \\
&= \frac{e^x}{(e^x-1)^3}\left(xe^x + x - 2e^x + 2\right), \\
&= \frac{e^x}{(e^x-1)^3} g(x).
\end{aligned}
$$

Finalement,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f''(x) = \frac{e^x}{(e^x-1)^3} g(x).}$$

(f) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. On a $x > 0$ donc par stricte croissance de exp, $e^x > 1$ et $e^x - 1 > 0$. On a donc, par les question 1, 2.d, 2.e et la continuité de f' :

x	0	$+\infty$
e^x	$\Vert$	$+$
$(e^x-1)^3$	$\Vert$	$+$
$g(x)$	$\Vert$	$+$
$f''(x)$	$\Vert$	$+$
$f'(x)$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$ 0

3. (a) Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$: « u_n existe et $u_n \in \mathbb{R}^+$ ».
INITIALISATION : Par l'énoncé, u_0 existe et $u_0 = 0 \in \mathbb{R}^+$, d'où $\mathcal{P}(0)$.
HÉRÉDITÉ : Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose $\mathcal{P}(n)$ et on montre $\mathcal{P}(n+1)$.
Par hypothèse de récurrence, u_n existe et $u_n \geq 0$. Comme f est définie sur $\mathbb{R}^+$, u_{n+1} existe.
   - Si $u_n = 0$, alors $u_{n+1} = 1 \in \mathbb{R}^+$.
   - Si $u_n > 0$ alors par stricte croissance de exp, $e^{u_n} - 1 > 0$, donc $f(u_n) > 0$, donc $u_{n+1} \in \mathbb{R}^+$.

   On a bien $\mathcal{P}(n+1)$.
   Finalement, par le principe de récurrence, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_n \text{ existe et } u_n \in \mathbb{R}^+.}$

   (b) Par lecture du tableau de variations de la question 2.f, $\forall x \in \mathbb{R}^+, -\frac{1}{2} \leq f'(x) \leq \frac{1}{2}$, ainsi, $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^+, |f'(x)| \leq \frac{1}{2}.}$

   (c) Soit $x \in \mathbb{R}^+$. Si $x = 0$, $f(x) \neq x$. On suppose maintenant $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$
\begin{aligned}
& f(x) &= x, \\
\Leftrightarrow\ & \frac{x}{e^x - 1} &= x, \\
\Leftrightarrow\ & 1 &= e^x - 1, \\
\Leftrightarrow\ & 2 &= e^x, \\
\Leftrightarrow\ & \ln(2) &= x.
\end{aligned}
$$

On a bien $\ln(2) \in \mathbb{R}_+^*$ ainsi $\boxed{\text{l'équation d'inconnue } x \in \mathbb{R}^+, f(x) = x \text{ admet comme unique solution } x = \ln(2).}$

(d) Soit $n \in \mathbb{N}$, on sait que

- f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}^+$ par les questions 2.a, 2.b et 2.c.
- $\forall x \in \mathbb{R}^+, |f'(x)| \leq \frac{1}{2}$, par la question 3.b.
- $u_n \in \mathbb{R}^+$ par la question 3.a et $\ln(2) \in \mathbb{R}^+$.

Ainsi, par l'inégalité des accroissements finis :

$$\begin{array}{rrcl} & |f(u_n) - f(\ln(2))| & \leq & \frac{1}{2}|u_n - \ln(2)|, \\ \text{donc} & |u_{n+1} - \ln(2)| & \leq & \frac{1}{2}|u_n - \ln(2)|. \end{array}$$

Ainsi, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \ln(2)| \leq \frac{1}{2}|u_n - \ln(2)|.}$

(e) Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$: « $|u_n - \ln(2)| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \ln(2)$ ».

Initialisation : On a

- $|u_0 - \ln(2)| = \ln(2)$,
- $\left(\frac{1}{2}\right)^0 \ln(2) = \ln(2)$.

Ainsi, $|u_0 - \ln(2)| = \left(\frac{1}{2}\right)^0 \ln(2)$, d'où $\mathcal{P}(0)$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose $\mathcal{P}(n)$ et on montre $\mathcal{P}(n+1)$.

Par hypothèse de récurrence,

$$\begin{array}{rrcl} & |u_n - \ln(2)| & \leq & \left(\frac{1}{2}\right)^n \ln(2), \\ \text{donc} & \frac{1}{2}|u_n - \ln(2)| & \leq & \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \ln(2), \\ \text{or, par 3.d} & |u_{n+1} - \ln(2)| & \leq & \frac{1}{2}|u_n - \ln(2)|, \\ \text{donc} & |u_{n+1} - \ln(2)| & \leq & \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \ln(2), \end{array}$$

d'où $\mathcal{P}(n+1)$.

Finalement, par le principe de récurrence, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \ln(2)| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \ln(2).}$

(f) Par la question 3.e

$$\begin{array}{rrrcccl} & \forall n \in \mathbb{N}, & & & |u_n - \ln(2)| & \leq & \left(\frac{1}{2}\right)^n \ln(2), \\ \text{donc} & \forall n \in \mathbb{N}, & -\left(\frac{1}{2}\right)^n \ln(2) & \leq & u_n - \ln(2) & \leq & \left(\frac{1}{2}\right)^n \ln(2), \\ \text{donc} & \forall n \in \mathbb{N}, & \ln(2) - \left(\frac{1}{2}\right)^n \ln(2) & \leq & u_n & \leq & \ln(2) + \left(\frac{1}{2}\right)^n \ln(2). \end{array}$$

De plus, comme $\frac{1}{2} \in]-1, 1[$, $\lim_{n \to +\infty} \ln(2) - \left(\frac{1}{2}\right)^n \ln(2) = \lim_{n \to +\infty} \ln(2) + \left(\frac{1}{2}\right)^n \ln(2) = \ln(2) \in \mathbb{R}$.

Finalement, par théorème d'encadrement, $\boxed{u \text{ converge et sa limite est } \ln(2).}$

Exercice 3

1. (a) On tape :

```python
import numpy as np
def u(n):
    return (-1)**n/(np.sqrt(n) + (-1)**n)
```

(b) On tape :

```python
def S(n):
  somme = 0
  for k in range(2,n+1):
    somme = somme + u(k)
  return somme
```

(c) On tape :

```python
for n in range(2,102):
  print(S(n))
```

2. (a) Soit $n \in [\![2, +\infty[\![$,

$$\begin{aligned} S_{2(n+1)} - S_{2n} &= \sum_{k=2}^{2n+2} v_k - \sum_{k=2}^{2n} v_k, \\ &= \frac{(-1)^{2n+2}}{\sqrt{2n+2}} + \frac{(-1)^{2n+1}}{\sqrt{2n+1}}, \\ &= \frac{1}{\sqrt{2n+2}} - \frac{1}{\sqrt{2n+1}}. \end{aligned}$$

Or, $2n+1 \leq 2n+2$, donc par croissance de la fonction racine, $\sqrt{2n+1} \leq \sqrt{2n+2}$, ainsi par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$ on a $\dfrac{1}{\sqrt{2n+2}} \leq \dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}$. On en déduit donc que

$$\begin{aligned} S_{2(n+1)} - S_{2n} &\leq 0, \\ \text{donc} \qquad S_{2(n+1)} &\leq S_{2n}. \end{aligned}$$

Ainsi, $\forall n \in [\![2, +\infty[\![, S_{2(n+1)} \leq S_{2n}$, donc $\boxed{(S_{2n})_{n\geq 2} \text{ est décroissante.}}$

(b) D'après la question précédente, $(S_{2n})_{n\geq 2}$ est décroissante.
Soit $n \in [\![2, +\infty[\![$,

$$\begin{aligned} S_{2(n+1)+1} - S_{2n+1} &= \sum_{k=2}^{2n+3} v_k - \sum_{k=2}^{2n+1} v_k, \\ &= \frac{(-1)^{2n+3}}{\sqrt{2n+3}} + \frac{(-1)^{2n+2}}{\sqrt{2n+2}}, \\ &= \frac{1}{\sqrt{2n+2}} - \frac{1}{\sqrt{2n+3}}. \end{aligned}$$

Or, $2n+2 \leq 2n+3$, donc par croissance de la fonction racine, $\sqrt{2n+2} \leq \sqrt{2n+3}$, ainsi par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$ on a $\dfrac{1}{\sqrt{2n+3}} \leq \dfrac{1}{\sqrt{2n+2}}$. On en déduit donc que

$$\begin{array}{rrcl} & S_{2(n+1)+1} - S_{2n+1} & \geq & 0, \\ \text{donc} & S_{2(n+1)+1} & \geq & S_{2n+1}. \end{array}$$

Ainsi, $\forall n \in [\![2, +\infty[\![, S_{2(n+1)+1} \geq S_{2n+1}$, donc $(S_{2n+1})_{n\geq 2}$ est croissante.
Enfin

$$\begin{array}{rcl} \lim\limits_{n\to+\infty} S_{2n+1} - S_{2n} & = & \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(-1)^{2n+1}}{\sqrt{2n+1}}, \\ & = & \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{-1}{\sqrt{2n+1}}, \\ & = & 0. \end{array}$$

Finalement, $\boxed{(S_{2n})_{n\geq 2} \text{ et } (S_{2n+1})_{n\geq 2} \text{ sont adjacentes.}}$

(c) Par la question 2.b, $(S_{2n})_{n\geq 2}$ et $(S_{2n+1})_{n\geq 2}$ sont adjacentes, donc elle converge vers une limite commune, ainsi $(S_n)_{n\geq 2}$ converge, donc $\boxed{\sum\limits_{n\geq 2} v_n \text{ converge.}}$

3. (a) Soit $n \in [\![2, +\infty[\![$,

$$\begin{array}{rcl} w_n & = & v_n - u_n, \\ & = & \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}, \\ & = & (-1)^n \dfrac{\sqrt{n} + (-1)^n - \sqrt{n}}{n + (-1)^n\sqrt{n}}, \\ & = & \dfrac{1}{n + (-1)^n\sqrt{n}}. \end{array}$$

Ainsi, $\boxed{\forall n \in [\![2, +\infty[\![, w_n = \dfrac{1}{n + (-1)^n\sqrt{n}}.}$

(b) Soit $n \in [\![2, +\infty[\![$,

$$\begin{array}{rrcll} & n & > & 1, & \\ \text{donc} & \sqrt{n} & > & 1, & \text{par stricte croissance de la fonction racine,} \\ \text{donc} & \sqrt{n} - 1 & > & 0, & \\ \text{or} & \sqrt{n} & > & 0, & \\ \text{donc} & \sqrt{n}\,(\sqrt{n} - 1) & > & 0, & \\ \text{donc} & n - \sqrt{n} & > & 0, & \\ \text{par ailleurs on a évidement} & n + \sqrt{n} & > & 0. & \end{array}$$

Finalement, que n soit pair ou impair, $n + (-1)^n\sqrt{n} > 0$, or par la question précédente, $w_n = \dfrac{1}{n + (-1)^n\sqrt{n}}$, donc $w_n > 0$.
On a bien $\boxed{\forall n \in [\![2, +\infty[\![, w_n > 0.}$

(c) Soit $n \in [\![2, +\infty[\![$,

$$\begin{array}{rcll} \dfrac{1}{nw_n} & = & \dfrac{1}{n \times \frac{1}{n+(-1)^n\sqrt{n}}}, & \text{par la question 3.a} \\ & = & \dfrac{n + (-1)^n\sqrt{n}}{n}, & \\ & = & 1 + \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}, & \\ & = & 1 + v_n. & \end{array}$$

Ainsi, $\boxed{\forall n \in [\![2,+\infty[\![, \dfrac{1}{nw_n} = 1 + v_n.}$

(d) On sait par la question 2 que $\sum\limits_{n\geq 2} v_n$ converge, ainsi, $(v_n)_{n\geq 2}$ converge vers 0, or, par la question 3.c,

$$\forall n \in [\![2,+\infty[\![, \frac{1}{nw_n} = 1 + v_n,$$

donc $\boxed{\left(\frac{1}{nw_n}\right)_{n\geq 2} \text{ converge et sa limite est 1.}}$

(e) Par la question 3.d, $\left(\frac{1}{nw_n}\right)_{n\geq 2}$ converge, donc $\left(\frac{1}{nw_n}\right)_{n\geq 2}$ est majorée. De plus, par la question 3.b $\left(\frac{1}{nw_n}\right)_{n\geq 2}$ est à termes strictement positifs, ainsi il existe $M \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\forall n \in [\![2,+\infty[\![, \dfrac{1}{nw_n} \leq M$. Enfin, comme $\forall n \in [\![2,+\infty[\![, w_n > 0$ (par la question 3.b) on a

$$\boxed{\exists M \in \mathbb{R}_+^*, \forall n \in [\![2,+\infty[\![, \frac{1}{n} \leq M w_n.}$$

(f) Soit $n \in [\![2,+\infty[\![$.

- ln est continue et dérivable sur $[n, n+1]$.
- On a $\forall x \in [n,n+1], ln'(x) = \dfrac{1}{x}$. Soit $x \in [n,n+1]$,

$$\begin{array}{lcccccl} & 0 & < & n & \leq & x & \\ \text{donc} & 0 & < & \dfrac{1}{x} & \leq & \dfrac{1}{n}, & \text{par décroissance de la fonction inverse sur } \mathbb{R}_+^* \\ \text{donc} & -\dfrac{1}{n} & < & \dfrac{1}{x} & \leq & \dfrac{1}{n}, & \\ \text{donc} & -\dfrac{1}{n} & \leq & \ln'(x) & \leq & \dfrac{1}{n}, & \\ \text{donc} & & & |\ln'(x)| & \leq & \dfrac{1}{n}. & \end{array}$$

Ainsi, $\forall x \in [n,n+1], |\ln'(x)| \leq \dfrac{1}{n}$.

Ainsi, par l'inégalité des accroissements finis,

$$\begin{array}{lrcl} & |\ln(n+1) - \ln(n)| & \leq & \dfrac{1}{n}\,|n+1-n| \\ \text{donc} & |\ln(n+1) - \ln(n)| & \leq & \dfrac{1}{n}, \\ \text{donc} & \ln(n+1) - \ln(n) & \leq & \dfrac{1}{n}, \text{ par croissance de ln.} \end{array}$$

Finalement, $\boxed{\forall n \in [\![2,+\infty[\![, \ln(n+1) - \ln(n) \leq \dfrac{1}{n}.}$

(g) Soit $n \in [\![2,+\infty[\![$. Par les questions 3.e et 3.f,

$$\forall k \in [\![2,n]\!], \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k} \leq M w_k.$$

Ainsi, en sommant on obtient

$$\begin{array}{lrcl} & \displaystyle\sum_{k=2}^{n} (\ln(k+1) - \ln(k)) & \leq & \displaystyle\sum_{k=2}^{n} M w_k, \\ \text{donc} & \ln(n+1) - \ln(2) & \leq & M \displaystyle\sum_{k=2}^{n} w_k, \text{ par télescopage,} \\ \text{donc} & \dfrac{1}{M}(\ln(n+1) - \ln(2)) & \leq & \displaystyle\sum_{k=2}^{n} w_k, \text{ car M>0.} \end{array}$$

Finalement, $\boxed{\forall n \in [\![2, +\infty[\![, \frac{1}{M}\left(\ln(n+1) - \ln(2)\right) \leq \sum_{k=2}^{n} w_k.}$

(h) Par la question 3.g, $\forall n \in [\![2, +\infty[\![, \frac{1}{M}\left(\ln(n+1) - \ln(2)\right) \leq \sum_{k=2}^{n} w_k$, or $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{M}\left(\ln(n+1) - \ln(2)\right) = +\infty$ car $M > 0$, donc par comparaison, $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum_{k=2}^{n} w_k = +\infty$. Finalement, $\boxed{\sum_{n \geq 2} w_n \text{ diverge.}}$

4. On suppose par l'absurde que $\sum_{n \geq 2} u_n$ converge. Par la question 2, $\sum_{n \geq 2} v_n$ converge. Ainsi, $\sum_{n \geq 2} v_n - u_n$ converge, autrement dit $\sum_{n \geq 2} w_n$ converge, mais par la question 3, $\sum_{n \geq 2} w_n$ diverge. Contradiction !

   Finalement, $\boxed{\sum_{n \geq 2} u_n \text{ diverge.}}$