TD 11

Continuité.

❑ 01 Montrer que l'équation $x\ln(x) = 2$ possède une solution dans l'intervalle $[2,3]$. On donne $\ln(2) < 1 < \ln(3)$.

❑ 02 Montrer que l'équation $x - 2 + \ln(x) = 0$ possède une unique solution dans l'intervalle $[1,3]$.

❑ 03 Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une fonction continue. Montrer que f possède un point fixe (i.e. il existe $x \in [0,1]$ tel que $f(x) = x$).

❑ 04 Soit f une fonction polynomiale de degré impair et de coefficient dominant positif. Montrer que f possède au moins une racine réelle. Le résultat est-il encore vrai si le coefficient dominant est négatif ?

❑ 05 Un randonneur parcourt 6km en deux heures. On pose la fonction

$$d : \begin{array}{ccc} [0,2] & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & d(t) \end{array}$$

où $d(t)$ est la distance en km parcourue par le randonneur en t heure(s). On suppose que la fonction d est continue.

1. Donner $d(0)$ et $d(2)$.
2. On définit la fonction f pour tout $t \in [1,2]$ par

$$f(t) = d(t) - d(t-1).$$

   (a) Soit $t \in [1,2]$. Que représente $f(t)$?

   (b) Déterminer $f(1) + f(2)$. En déduire qu'il existe un intervalle de temps d'une heure durant lequel le randonneur a parcouru 3km.

❑ 06 Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) \neq 0$.

1. Démontrer que g est de signe constant (on pourra raisonner par contraposée).
2. On suppose de plus que $\forall x \in \mathbb{R}, (g(x))^2 = 1$. Montrer que g est une fonction constante.

❑ 07 Soit $f : [1,2] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer qu'il existe deux réels x_1 et x_2 tels que

$$\forall x \in [1,2], xx_1 \leq f(x) \leq xx_2.$$

On pourra considérer g définie sur $[1,2]$ par $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$.

❑ 08 Soit $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que : $\forall x \in [-1,1], f(x) > 0$. Montrer qu'il existe $m > 0$ tel que pour tout $x \in [-1,1]$, on a : $f(x) \geq m$.

❑ 09 Soit

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{x}{1+|x|} \end{array}.$$

1. Étudier la parité de f.
2. Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}_+^*$. En déduire le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $f(\mathbb{R})$.
4. Déterminer $f(\mathbb{R}^+)$, $f(\mathbb{R}^-)$ et $f(\mathbb{R})$.
5. Déterminer f^{-1} (on pourra étudier séparément les cas positif et négatif).

❑ 10 On définit

$$f : \begin{cases}]-2,+\infty[& \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto (x^2+3x+2)\ln(x+2) \end{cases}$$

1. Déterminer les limites de f en -2 et en $+\infty$.
2. Justifier que f est dérivable.
3. On pose

$$g : \begin{cases}]-2,+\infty[\setminus \{-\frac{3}{2}\} & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \dfrac{f'(x)}{2x+3} \end{cases}$$

   (a) Montrer qu'il existe un unique $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$ avec $\alpha_1 < \alpha_2$ et tel que $g(\alpha_1) = g(\alpha_2) = 0$.
   (b) Déterminer α_2.
   (c) Donner le tableau de signes de g en fonction de α_1.

4. En déduire le signe f' puis les variations de f en fonction de α_1.
5. Tracer l'allure de la courbe représentative de f.

❑ 11 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et décroissante sur $\mathbb{R}$.

On souhaite démontrer que la fonction f admet un unique point fixe. Pour ce faire on considère la fonction $g : x \mapsto f(x) - x$.

1. En appliquant le théorème de la limite monotone à f montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$.
2. En déduire que f possède un point fixe.
3. En raisonnant par l'absurde, démontrer que ce point fixe est unique.
4. Ce résultat est-il valable si f est croissante ?

❑ 12 On considère les fonctions $f_n : x \mapsto x^n + x - 1$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution $x_n \in]0,1[$.

   On s'intéresse maintenant à la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

2. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*, f_{n+1}(x_n) = -(x_n - 1)^2$.
   (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*, f_{n+1}(x_n) < f_{n+1}(x_{n+1})$.
   (c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*, x_n < x_{n+1}$
3. Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et que sa limite ℓ vérifie $0 < \ell \leq 1$.
4. On souhaite démontrer que $\ell = 1$. On suppose par l'absurde que $0 < \ell < 1$.
   (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, x_n \leq \ell$.
   (b) En déduire que $((x_n)^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0.
   (c) Conclure.