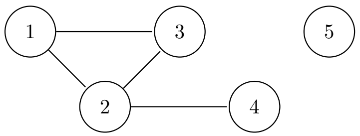
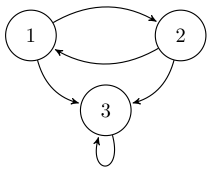
TD 12

Théorie des Graphes.

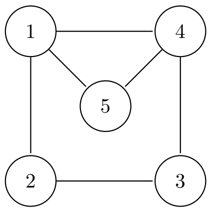
❑ 01 Pour chaque graphe donner : les degrés des sommets, le nombre d'arêtes, la matrice d'adjacence. Quels graphes sont connexes ?



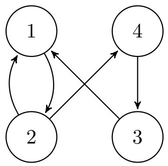
Graphe 1



Graphe 3



Graphe 2



Graphe 4

❑ 02 Soit G un graphe dont l'ensemble des sommets est $\{1, 2, 3, 4\}$. On donne sa matrice d'adjacence (en prenant les sommets dans l'ordre croissant) :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. G est-il orienté ?
2. Sans tracer G, déterminer les degrés de chacun des sommets.
3. Justifier par le calcul que G n'est pas connexe.

❑ 03 On considère le graphe 3 de l'exercice 1 pour lequel on souhaite connaître le nombre de chemins de longueur donnée, allant du sommet 1 au sommet 3.

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$A^n = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & 1 & n \\ 1 & 0 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \text{si } n \text{ est impair,} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & n \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \text{si } n \text{ est pair.} \end{cases}$$

2. En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le nombre de chemins de longueur n allant du sommet 1 au sommet 3.

❑ 04 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle graphe complet d'ordre n un graphe non orienté à n sommets tel que deux sommets distincts sont toujours reliés par une arête.

1. Déterminer les degrés des sommets d'un graphe complet d'ordre n.
2. Déterminer le nombre d'arête d'un graphe complet d'ordre n.
3. Lors d'une réunion regroupant n personnes tout le monde se sert la main. Combien de poignées de mains sont échangées ?

❑ 05

1. Traduire avec le vocabulaire des graphes : « Dans un groupe de 5 personnes, il y a toujours deux personnes ayant le même nombre d'amis (au sein de ce groupe) ».
2. On considère un graphe non orienté à 5 sommets.
   (a) Déterminer l'ensemble des degrés possibles pour chacun des sommets.

(b) Démontrer à l'aide d'un raisonnement par l'absurde qu'il existe deux sommets de même degré.

❑ 06 Soit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Soit $B = I_4 - A$. Montrer que B est inversible et déterminer son inverse.
2. Calculer A^2 et A^4.
3. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M^n = 0_n$. Montrer que $\sum_{k=0}^{n-1} M^k$ est inversible et que son inverse est $I_n - M$.
4. En déduire sans calcul supplémentaire la valeur de $I_4 + A + A^2 + A^3$.
5. On considère un graphe orienté ayant A comme matrice d'adjacence. Ce graphe est-il connexe ?

❑ 07 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Un groupe de n amis souhaite organiser une fête où chacun d'entre eux échange un cadeau avec exactement 3 autres amis.

1. Traduire la situation avec un graphe.
2. Montrer que c'est impossible si n est impair.
3. Donner au moins une façon de faire si n est pair.

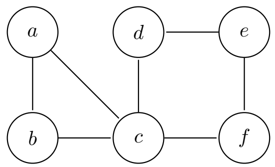
❑ 08 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Un groupe de travail de n personnes souhaite communiquer via un réseau social avec liens d'amitié réciproques entre utilisateurs. On représente le groupe de travail sur le réseau social par un graphe G non orienté dont les sommets sont les personnes du groupe de travail, et où l'on place une arête entre deux sommets si les personnes correspondantes sont « amies » sur le réseau social.

Lorsque l'une des personnes du groupe veut transmettre une information à tous les membres du groupe, elle la communique à tous ses « amis » au sein du groupe de travail et leur demande de faire de même.

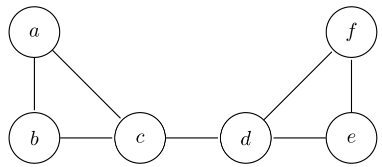
1. Comment doit être G pour que leur stratégie de communication fonctionne ?
2. Lorsqu'une personne veut envoyer une information à tous ses « amis » elle fait *un* envoi groupé.
   (a) Combien faut-il au maximum d'envois groupés ? Comment doit-être le graphe pour être dans cette situation ?
   (b) Combien faut-il au minimum d'envois groupés ? Comment doit-être le graphe pour être certain que le nombre d'envois soit toujours minimal ?
3. Dans un graphe connexe, on dit qu'un sommet est un *point de rupture*, si en retirant ce sommet ainsi que tous les arêtes incidentes à ce sommet, le graphe que l'on obtient n'est plus connexe.

   Dans un graphe connexe, on dit qu'une arête est un *séparateur*, si en retirant cette arête, le graphe que l'on obtient n'est plus connexe.

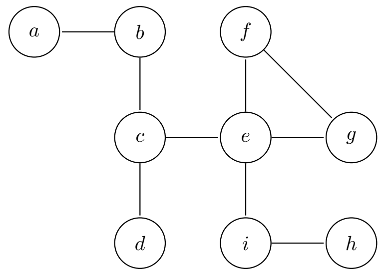
   Comment traduire les notions de *point de rupture* et *séparateur* dans le contexte de notre groupe de travail ?
4. Dans les graphes suivant identifier les points de rupture, les séparateur, le nombre maximal d'envois groupés, le nombre minimal d'envois groupé.



Graphe 1



Graphe 2



Graphe 3