TD 14

Séries.

❑ 01 Étudier la nature et donner la somme (si elle existe) de chacune des séries réelles suivantes.

1. $\sum 3^n$
2. $\sum (-5)^n$
3. $\sum \left(\frac{1}{3}\right)^n$
4. $\sum \frac{1}{4^n}$
5. $\sum \left(-\frac{1}{3}\right)^n$
6. $\sum \frac{-1}{3^n}$
7. $\sum e^n$
8. $\sum e^{2n}$
9. $\sum e^{-n}$
10. $\sum \frac{4}{3^{2n-5}}$
11. $\sum 5^{-n}$
12. $\sum n2^{n-1}$
13. $\sum \frac{n}{2^{n-1}}$
14. $\sum ne^{-n}$
15. $\sum (n+1)2^{-n}$
16. $\sum n5^{n+1}$
17. $\sum \frac{n}{2^{2n+4}}$
18. $\sum n(n-1)2^{n-2}$
19. $\sum n(n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$
20. $\sum n^2 3^{-n}$
21. $\sum n^2 3^n$
22. $\sum \frac{(n+1)n}{4^n}$
23. $\sum \frac{2^n}{n!}$
24. $\sum \frac{1}{3^n n!}$
25. $\sum \frac{(-3)^{n+1}}{n!}$
26. $\sum \frac{(5)^{2n}}{n!}$
27. $\sum \frac{n^2}{n!}$
28. $\sum \frac{n+7}{2^n n!}$
29. $\sum n^3$
30. $\sum \frac{2n-n^3}{n^3+n^2+5}$

❑ 02 Pour tout entier naturel n on pose $u_n = \frac{1}{4n^2-1}$. Déterminer la nature de $\sum u_n$ et sa somme si elle existe. On cherchera a et b tels que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{a}{2n-1} + \frac{b}{2n+1}$.

❑ 03 Pour tout entier naturel n on pose $u_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$. Déterminer la nature de $\sum u_n$ et sa somme si elle existe. On cherchera a et b tels que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{a}{n+1} + \frac{b}{n+2}$.

❑ 04

1. Montrer par récurrence que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n}.$$
En déduire que $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge.

2. En déduire que $\sum_{n\geq 2} \frac{n^2+1}{(n^2-1)^2}$ converge. On cherchera a et b tels que pour tout entier naturel n, $\frac{n^2+1}{(n^2-1)^2} = \frac{a}{(n+1)^2} + \frac{b}{(n-1)^2}$.

❑ 05

1. Montrer que pour tout entier naturel non nul k :
$$\ln\left(1 + \frac{3}{k(k+4)}\right) = \ln\left(\frac{k+1}{k+4}\right) - \ln\left(\frac{k}{k+3}\right).$$

2. En déduire la nature de $\sum_{n\geq 1} \ln\left(1 + \frac{3}{n(n+4)}\right)$ ainsi que sa somme si elle existe.

❑ 06 On considère la suite (α_n) définie par :

$$\begin{cases} \alpha_0 > 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad \alpha_{n+1} = e^{-\alpha_n}\alpha_n \end{cases}$$

1. Montrer que la suite (α_n) est convergente et déterminer sa limite.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\beta_n = \ln(\alpha_n)$. Calculer $\beta_{n+1} - \beta_n$ en fonction de α_n.
3. En déduire la nature de $\sum \alpha_n$.

❑ 07 Soient u et v deux suites définies par $u_0 = 9$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 3$ et $v_n = u_n + 6$.

1. Déterminer la nature de $\sum v_n$ et sa somme si elle existe.
2. Déterminer la nature de $\sum u_n$ et sa somme si elle existe.
3. Pour tout entier naturel n on pose $w_n = \ln(v_n)$. Déterminer la nature de $\sum w_n$ et sa somme si elle existe.

❑ 08 On admet que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

1. Montrer que $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{(2n)^2}$ converge et déterminer sa somme.
2. En déduire que $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{1}{(2n+1)^2}$ converge et déterminer sa somme.

❑ 09 Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles à termes positifs telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n.$$

1. Montrer que si $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge.
2. Donner une condition suffisante sur $\sum u_n$ pour que $\sum v_n$ diverge.