TD 15

Dérivation.

□ 01 Étudier la dérivabilité de la fonction f en x_0 .

1. $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = |x^2 - 4|$ et $x_0 = 2$.
2. $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x < 0 \\ x - 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ et $x_0 = 0$.
3. $\forall x \in \mathbb{R}^+, f(x) = x + \sqrt{x}$ et $x_0 = 0$.
4. $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = (x - 1)|x - 1|$ et $x_0 = 1$.

□ 02 Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{x^2}{1 + |x|} \end{cases}$.

1. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer f' .
3. f' est-elle continue en 0 ?

□ 03 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée qui n'admet pas de limite en $+\infty$ (réelle ou infinie).

1. Montrer que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \begin{cases} x^2 f\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est dérivable en 0.
2. Montrer que la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \begin{cases} x f\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ n'est pas dérivable en 0.

□ 04 Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{3/2} - (1-x)}{x}$,
2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{x}$.

□ 05 Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln(1+x+x^2) \end{cases}$.

1. Vérifier que f est bien définie sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
3. Déterminer l'équation de la tangente t à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0.
4. On pose pour tout réel $x, g(x) = \ln(1+x+x^2) - x$.
 - (a) Dresser le tableau de variations de g (on ne fera pas apparaître les limites en $+\infty$ et $-\infty$).
 - (b) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$.
 - (c) En déduire qu'il existe un unique $x \in [1, +\infty[$ tel que $g(x) = 0$. On appelle α ce nombre.
 - (d) Préciser la position de la courbe représentative de f par rapport à la tangente t .

□ 06 Soit $c : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de coût dérivable. On définit

$$c_M : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{c(x)}{x} \end{cases}$$

1.
 - (a) Justifier que c_M est dérivable.
 - (b) Montrer que $f : x \mapsto c'(x) - c_M(x)$ et c'_M sont de même signe.
 - (c) Comment interpréter ce résultat ?
2. On considère ici que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, c(x) = 5x^2 + 6x + 245$.
 - (a) Résoudre l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+^*, (E) : c'(x) = c_M(x)$.
 - (b) On note α l'unique solution de (E), vérifier que c_M admet un minimum en α .

□ 07 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable.

1. Montre que : f paire $\Rightarrow f'$ impaire.
2. Montre que : f impaire $\Rightarrow f'$ paire.
3. Les réciproques sont-elles vraies ?

□ 08 Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse x_0

- (a) $f : x \mapsto x \ln(x + 3)$ et $x_0 = 0$. (c) $f : x \mapsto -\frac{1}{3}x - 5$ et $x_0 = 7$.
- (b) $f : x \mapsto (\ln(2x + 3))^3$ et $x_0 = -1$. (d) $f : x \mapsto \exp(\sqrt{x^2 + 1})$ et $x_0 = 3$.

□ 09 Soit $f : x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

- (a) Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$.
- (b) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur I un intervalle à préciser.
- (c) Dresser le tableau de variations de f^{-1} .
- (d) Déterminer une expression générale de f^{-1} et de sa dérivée.
- (e) Tracer la courbe représentative de f^{-1} (on fera apparaître la tangente en 0).

□ 10

1. Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}^*, |\ln(k + 1) - \ln(k)| \leq \frac{1}{k}$.
2. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \geq \ln(1 + n)$.
3. En déduire la nature de $\sum \frac{1}{n}$.

□ 11 Soit $\alpha \in]0; 1[$.

1. Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}^*, (k + 1)^{1-\alpha} - k^{1-\alpha} \leq \frac{1 - \alpha}{k^\alpha}$
2. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} \geq \frac{1}{1 - \alpha} ((n + 1)^{1-\alpha} - 1)$.
3. Quelle est la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$?

□ 12 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$S_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \text{ et } f_n : \begin{cases} [0, 1] & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & e^{-x} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \end{cases}$$

1. Justifier que pour tout entier naturel n , f_n est dérivable et que

$$\forall x \in [0, 1], f'_n(x) = -\frac{x^n e^{-x}}{n!}.$$

2. En déduire que pour tout entier naturel $n : \forall x \in [0, 1], |f'_n(x)| \leq \frac{1}{n!}$.
3. À l'aide de l'inégalité des accroissements finis, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left| \frac{S_n}{e} - 1 \right| \leq \frac{1}{n!}.$$

4. En déduire que (S_n) converge et donner sa limite.

□ 13 Soit $f : x \mapsto e^{-\frac{x^2}{2}}$. On définit la suite $u : \begin{cases} u_0 \in [0, 1] \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n). \end{cases}$

1. Montrer que l'équation $f(x) = x$ possède une unique solution dans $[0, 1]$. On note cette solution α .
2. Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [0, 1]$.
3. (a) Montrer que $\forall x \in [0, 1], |f'(x)| = xe^{-\frac{x^2}{2}}$.

En dérivant cette expression montrer que $\forall x \in [0, 1], |f'(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{e}}$.

(b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{\sqrt{e}} |u_n - \alpha|$.

(c) Puis que $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^n |u_0 - \alpha|$.

(d) En déduire que u converge et donner sa limite.

□ 14 Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{x}{2} + \frac{1}{x}, \end{cases}$ et $u : \begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{1}{u_n}. \end{cases}$

1. Déterminer les points fixes de f .
2. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n , u_n existe et $u_n \in [1, 2]$.
3. (a) En appliquant l'inégalité des accroissements finis montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left| u_{n+1} - \sqrt{2} \right| \leq \frac{1}{2} \left| u_n - \sqrt{2} \right|.$$

(b) En déduire par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left| u_n - \sqrt{2} \right| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \left| u_0 - \sqrt{2} \right|.$$

(c) Déterminer la nature de u et sa limite éventuelle.

□ 15 Existe-il un réel a tel que $f : x \mapsto 2ax^3 + 6x^2 + x - 5$ possède un extremum local en $x = -\frac{1}{6}$?

□ 16 Montrer qu'une fonction polynomiale de degré $n \in \mathbb{N}^*$ possède au plus $n - 1$ extrémums locaux.