TD 17

Sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$

□ 01 Les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^2$ sont-ils des sous-espaces vectoriels ?

- (a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 0\}$.
- (b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 1\}$.
- (c) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y \geq 0\}$.
- (d) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0\}$.
- (e) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq y\}$.
- (f) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x + 3y = 0\}$.

□ 02 Les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^3$ sont-ils des sous-espaces vectoriels ?

- (a) $F_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x - 7y = z\}$.
- (b) $F_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 - z^2 = 0\}$.
- (c) $F_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = x + y + z = 0\}$.
- (d) $F_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z(x^2 + y^2) = 0\}$.

□ 03

- (a) Soient $x = (1, 1, 0)$ et $y = (0, 1, 1)$. La famille (x, y) est-elle libre ?
- (b) Soient $x = (0, 0, 1)$, $y = (0, 1, 1)$ et $z = (1, 1, 1)$. La famille (x, y, z) est-elle libre ?
- (c) Soient $x = (0, 1, -1)$, $y = (1, 0, -1)$ et $z = (1, -1, 0)$. La famille (x, y, z) est-elle libre ?
- (d) Soient $x = (1, 1, -1)$, $y = (1, -1, -1)$, $z = (-1, 1, 1)$ et $t = (1, 1, 1)$. La famille (x, y, z, t) est-elle libre ?

□ 04

- 1. Les familles de vecteurs de $\mathbb{R}^2$ suivantes sont-elles des bases de $\mathbb{R}^2$?

- (a) $((1, 1), (0, 1))$.
- (b) $((2, 4), (-\frac{1}{2}, -1))$.
- (c) $((1, 1), (0, 1), (4, 3))$.
- (d) $((\sqrt{2}, 1), (1, \sqrt{2}))$.

- 2. Donner l'unique décomposition du vecteur $(-3, 2)$ dans chaque base de la question 1.

□ 05

- 1. Les familles de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivantes sont-elles des bases de $\mathbb{R}^3$?
 - (a) $((0, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0))$.
 - (b) $((-3, 1, 1), (0, \frac{3}{2}, -1))$.
 - (c) $((1, 2, 3), (-2, \frac{3}{2}, 5), (0, 1, -1))$.
- 2. Donner l'unique décomposition du vecteur $(6, 4, -7)$ dans chaque base de la question 1.

□ 06 Montrer que les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels et déterminer leurs dimensions.

- 1. $F_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + 3z = 0\}$.
- 2. $F_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 2y = 3z\}$.
- 3. $F_3 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y = 0, y + z = 0, z + t = 0, t + x = 0\}$.

□ 07 Déterminer le rang de la famille (x_1, x_2, x_3, x_4) dans chacun des cas suivants :

- 1. Soit $x_1 = (1, 1, 0, 1)$, $x_2 = (1, -1, 1, 0)$, $x_3 = (2, 0, 1, 1)$ et $x_4 = (0, -2, 1, -1)$.
- 2. Soit $x_1 = (0, 1, 1, 1)$, $x_2 = (1, 0, 1, 1)$, $x_3 = (1, 1, 0, 1)$ et $x_4 = (1, 1, 1, 0)$.
- 3. Soit $x_1 = (0, 1, 0, 1)$, $x_2 = (1, -1, 1, -1)$, $x_3 = (1, -1, -1, 1)$ et $x_4 = (1, 1, 1, 1)$.

□ 08 Soient $e_1 = (1, 1, 1, 1)$ et $e_2 = (1, 1, -1, -1)$. Compléter la famille (e_1, e_2) en une base de $\mathbb{R}^4$.

□ 09 Soient $x_1 = (1, 1, 2, 0)$, $x_2 = (1, -1, 0, -2)$, $x_3 = (0, 1, 1, 1)$ et $x_4 = (1, 0, 1, -1)$ des vecteurs de $\mathbb{R}^4$, et $F = \text{Vect}(x_1, x_2, x_3, x_4)$.

1. Montrer que $x_3 \in \text{Vect}(x_1, x_2)$ et $x_4 \in \text{Vect}(x_1, x_2)$. En déduire que (x_1, x_2, x_3, x_4) n'est pas une base de F .
2. En déduire que $F = \text{Vect}(x_1, x_2)$ (on pourra raisonner par double inclusion).
3. Conclure que (x_1, x_2) est une base de F .

□ 10 Soient E le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs $v_1 = (2, 3, -1)$ et $v_2 = (1, -1, -2)$ et F celui engendré par $w_1 = (3, 7, 0)$ et $w_2 = (5, 0, -7)$.

Montrer que $E = F$.

□ 11 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$.

1. Montrer que $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.
2. Est-ce vrai pour $F \cup G$?