TD 18

Variables aléatoires réelles

❑ 01 On considère l'univers $\Omega = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,0\}$ et l'espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$. On définit les variables aléatoires X et Y par la table suivante :

issues	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
X	1	1	0	0	2	2	2	-1	-1	3
Y	1	0	0	1	0	1	2	1	0	0

1. Expliciter les événements suivants :
   (a) $[X = 0]$
   (b) $[X < 2]$
   (c) $[Y = 0]$
   (d) $[X = -2]$
   (e) $[Y = 1]$
   (f) $[Y \geq 0]$
   (g) $[0 \leq X < 1]$
   (h) $[0 < Y < 1]$
   (i) $[X > Y]$
2. Les issues ayant toutes la même probabilité, déterminer la loi de X et la loi de Y

❑ 02 Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé admettant une variable aléatoire réelle X telle que $X \hookrightarrow \mathcal{B}\left(4, \frac{1}{4}\right)$.

1. Déterminer la loi de $Y = (-X + 2)$.
2. Déterminer la loi de $Z = X^2$.
3. Déterminer la loi de $T = Y^2$.
4. Déterminer la loi de $U = |Y|$.

❑ 03 Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé admettant une variable aléatoire réelle X telle que $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket -100, 100 \rrbracket)$.

1. Calculer $P(X \in [0, 12])$, $P(X \in \llbracket -10, 10 \rrbracket)$ et $P(10 < X \leq 13)$.
2. Déterminer la loi de $Y = |X|$.
3. Déterminer la loi de $Z = -X$.

❑ 04 Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé admettant une variable aléatoire réelle X telle que $X \hookrightarrow \mathcal{P}(2)$. Calculer $P(-3 < X < 2)$, $P(X > 2)$ et $P(X \in \llbracket 12, 13 \rrbracket)$.

❑ 05 Une urne contient 4 boules blanches et 6 boules noires, indiscernables au toucher. On pioche simultanément 3 boules dans l'urne.
On note Y le nombre de boules blanches.

1. Déterminer la loi de Y.
   On gagne 1 euro par boule blanche piochée et on perd 2 euros par boule noire piochée. On note X le gain (éventuellement négatif).
2. Déterminer la fonction g affine telle que $X = g(Y)$.
3. En déduire la loi de X.

❑ 06

1. On tire 8 cartes au hasard équiprobable (sans remise) dans un jeu de 32 cartes et on note X le nombre de trèfles tirés. Déterminer la loi de X.
2. On note Y le nombre d'as tirés, déterminer la loi de Y.

❑ 07 Un joueur de basket s'entraîne à faire des tirs à trois points. Pour cela, il recommence jusqu'à ce qu'il y arrive ou s'arrête après le $20^{\text{ème}}$ lancer s'il n'en a réussi aucun. La probabilité de réussir chaque lancer est $p \in]0; 1[$ et chaque lancer est indépendant des précédents. On note X le nombre d'essais ratés avant qu'il ne s'arrête.

1. Déterminer la loi de X.
2. On note S le support de X, vérifier que $\displaystyle\sum_{x \in S} P(X = x) = 1$.

❑ 08 Soit E un ensemble à n éléments (avec $n \geq 1$). On fixe A une partie de E à k éléments . On choisit une partie B de E au hasard équiprobable et on note X le nombre d'éléments communs à A et B. Donner la loi de la variable aléatoire X.

❑ 09 Soit $p \in]0;1[$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

On tire n fois de suite sur une cible avec la probabilité p d'atteindre cette cible. Les tirs sont mutuellement indépendants. À l'issue des n tirs, un compteur comptabilise le nombre de fois où la cible a été atteinte au cours de ces n tirs. Cependant ce compteur est détraqué et il affiche le bon résultat avec la probabilité $\frac{1}{2}$ et le bon résultat augmenté d'un avec une probabilité de $\frac{1}{2}$ et ce indépendamment du nombre de touches.

Soit X la variable aléatoire réelle égale au nombre affiché par le compteur et soit Y la variable aléatoire réelle égale au nombre de fois où la cible a été atteinte lors de ces n tirs.

1. Identifier la loi de Y.
2. Déterminer la loi de X.

❑ 10 La variable aléatoire X suit une loi binomiale $\mathcal{B}\left(1000, \dfrac{1}{3}\right)$. On définit alors une autre variable aléatoire Y de la manière suivante : si $X > 0$, alors $Y = X$, et si $X = 0$, alors Y est tiré au sort uniformément dans $\{1, \ldots, 1000\}$.

Déterminer la loi de Y.

❑ 11 Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On lance un dé 6 équilibré n fois de suite. Les lancers sont mutuellement indépendants. On note X le plus grand résultat obtenu sur ces n lancers.

1. Déterminer pour tout $k \in [\![1, 6]\!], P(X \leq k)$.
2. En déduire la loi de X.
3. Donner la loi de X dans la cas particulier de $n = 2$. Retrouver ce résultat avec un tableau à deux entrées.

❑ 12 Une puce saute d'un sommet à l'autre d'un triangle. Plus précisément, on appelle A, B et C les sommets. La puce est initialement en A à l'instant $n = 0$.

- Si la puce est en A à l'instant n, elle passe en B ou en C avec équiprobabilité l'instant $n + 1$.
- Si la puce est en B à l'instant n, elle passe en A ou en C avec équiprobabilité l'instant $n + 1$.
- Si la puce est en C à l'instant n, elle y reste.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note respectivement a_n, b_n et c_n les probabilités pour la puce de se trouver en A, en B ou en C à l'instant n.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer des relations entre $a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}$ et a_n, b_n, c_n.
2. (a) Montrer que pour tout entier naturel n, $c_{n+2} = \dfrac{3}{2}c_{n+1} - \dfrac{1}{2}c_n$.

   (b) En déduire l'expression de c_n pour tout entier naturel n.
3. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} c_n$.
4. On note X la variable aléatoire réelle égale au premier instant où la puce atteint la case C.

   Déterminer la loi de X. Quelle loi usuelle suit X ?

$\boxed{❑\ \mathbf{13}}$ Une infinité dénombrable de ninjas attaque un élève pour connaitre l'identité de son professeur de mathématiques. Les ninjas attaquent 1 par 1. Chaque ninja a une probabilité $p \in]0,1[$ de réussir à capturer l'élève et cela indépendamment des autres ninjas, dans le cas contraire le ninja meurt.

1. On note X le rang du ninja qui capture l'élève (on pose $X = 0$ si aucun ninja ne parvient à capturer l'élève).
   (a) Déterminer, à priori, le support de la variable aléatoire X.
   (b) Déterminer, pour tout $k \in \mathbb{N}^*, P(X = k)$.
   (c) En déduire $P(X = 0)$ et identifier la loi de X.
2. Si l'élève est capturé par le k-ème ninja, la probabilité qu'il cède sous la torture et dévoile le nom de son professeur est de p^{k-1}.

   Déterminer la probabilité que les ninja obtiennent le nom du professeur.
3. Chaque élève de la classe de ECG mathématiques appliquées 1A subit ces attaques indépendamment. On note Y le nombre d'élèves dévoilant le nom de leur professeur.
   (a) Identifier la loi de la variable aléatoire Y.
   (b) Quelle est la probabilité qu'aucun des élèves ne dévoile le nom de leur professeur ?

$\boxed{❑\ \mathbf{14}}$ Dans un film, des zombies attaquent un lycée. On note X le nombre d'élèves mordus durant cette attaque. On suppose que $X \hookrightarrow \mathcal{P}(10)$.

La probabilité qu'un élève mordu se transforme en zombie est de $\frac{1}{3}$ et cela indépendamment des autres élèves.

1. Soit $k \in \mathbb{N}$. Sachant que le nombre d'élèves mordus est k, quelle est la probabilité qu'aucun élève ne se transforme en zombie ?
2. En déduire la probabilité qu'aucun élève ne se transforme en zombie à l'issue de cette attaque.
3. Commenter le modèle choisi.