TD 19

Concavité, convexité.

❑ 01 Montrer que la fonction

$$f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leq 0, \\ e^{-\frac{1}{x}} & \text{si} \quad x > 0. \end{cases} \end{array}$$

est de classe $\mathcal{C}^1$.

❑ 02 Dresser le tableau de variations de f et étudier la convexité ainsi que les points d'inflexions éventuels de sa courbe représentative $\mathcal{C}_f$. Puis tracer l'allure de $\mathcal{C}_f$.

1. $f : x \mapsto \exp\left(-x^2\right)$.
2. $f : x \mapsto \ln\left(\left|\dfrac{x+3}{x-1}\right|\right)$.

❑ 03

1. (a) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de exp au point d'abscisse 0.
   (b) En déduire que : $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq x+1$.
2. (a) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de ln au point d'abscisse 1.
   (b) En déduire que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ln(x) \leq x-1$.

❑ 04

1. Montrer que la fonction $f : x \to \ln(\ln(x))$ est concave sur $]1,+\infty[$.
2. En déduire que : $\forall (x,y) \in]1,+\infty[^2, \ln\left(\dfrac{x+y}{2}\right) \geq \sqrt{\ln(x)\ln(y)}$.

❑ 05 Soit

$$f: \begin{array}{rcl}]-1;+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln(1+x). \end{array}$$

1. Montrer que f est concave.
2. En déduire que

$$\forall x \in [0,1], \quad \ln(1+x) \geq \ln(2)x.$$

On pourra chercher $(t_1,t_2) \in [0,1]^2$ tel que $t_1+t_2 = 1$ et $t_1 \times 0 + t_2 \times 1 = x$.

❑ 06

1. Montrer que

$$\forall x \in [1,e], x = \frac{e-x}{e-1} \times 1 + \frac{x-1}{e-1} \times e.$$

2. En déduire par concavité du logarithme que

$$\forall x \in [1,e], \quad \ln(x) \geq \frac{x-1}{e-1}.$$

❑ 07 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ majorée et convexe. On souhaite démontrer que f est constante.
On suppose par l'absurde que f n'est pas constante.

1. Montrer qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f'(x_0) \neq 0$.
2. Justifier que

$$f(x) \geq f(x_0) + (x-x_0)f'(x_0).$$

3. Conclure. On pourra distinguer les cas $f'(x_0) < 0$ et $f'(x_0) > 0$ et étudier les limites éventuelles de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

❑ 08

1. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ une fonction concave, $(x_1, x_2, x_3) \in \mathrm{I}^3$ et $(t_1, t_2, t_3) \in [0,1]^3$ tels que $t_1 + t_2 + t_3 = 1$.

   (a) Montrer que

   $$f(t_1x_1 + t_2x_2 + t_3x_3) \geq (t_1 + t_2)f\left(\frac{t_1}{t_1+t_2}x_1 + \frac{t_2}{t_1+t_2}x_2\right) + t_3f(x_3).$$

   (b) En déduire que

   $$f(t_1x_1 + t_2x_2 + t_3x_3) \geq t_1f(x_1) + t_2f(x_2) + t_3f(x_3).$$

2. Application : on souhaite démontrer que pour tout $(x_1, x_2, x_3) \in (\mathbb{R}_+^*)^3$,

   $$\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \geq (x_1x_2x_3)^{\frac{1}{3}}.$$

   (a) Soit $(x_1, x_2, x_3) \in (\mathbb{R}_+^*)^3$, montrer que

   $$\ln\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}\right) \geq \frac{1}{3}\ln(x_1) + \frac{1}{3}\ln(x_2) + \frac{1}{3}\ln(x_3).$$

   (b) Conclure.