

TD 20

Intégration sur un segment.

□ 01 Calculer les intégrales suivantes.

1. $\int_{-1}^3 (t^2 + t) dt.$
2. $\int_1^3 \left(5t^2 + 3t - 5 - \frac{1}{t^2} \right) dt.$
3. $\int_{-1}^{-2} (t + e^t) dt.$
4. $\int_{\frac{3}{2}}^5 \frac{1}{2t-1} dt.$
5. $\int_0^1 te^{-t^2} dt.$
6. $\int_0^2 \frac{t}{1+t^2} dt.$
7. $\int_{-1}^2 \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} dt.$
8. $\int_1^2 \frac{2t+2}{t^2+2t+2} dt.$
9. $\int_1^2 \frac{(\ln(t))^5}{t} dt.$
10. $\int_1^2 \frac{t}{(1+t^2)^2} dt.$

□ 02 Calculer $\int_{-2}^2 |t^3 - t| dt.$

□ 03

1. Déterminer quatre réels a, b, c, d tels que :

$$\forall t \in [2, 3], \quad \frac{t^3 - 2t - 1}{t^2 - t} = at + b + \frac{c}{t} + \frac{d}{t-1}.$$

2. En déduire $\int_2^3 \frac{t^3 - 2t - 1}{t^2 - t} dt.$

□ 04 Calculer les intégrales suivantes par intégration par parties.

1. $\int_{-1}^0 te^{-t} dt.$
2. $\int_1^2 (2t^3 + 1) \ln(t) dt.$
3. $\int_2^1 t \ln(t) dt.$
4. $\int_1^2 t^n \ln(t) dt, \text{ avec } n \in \mathbb{N}^*.$
5. $\int_1^e (t - e) \ln(t) dt.$
6. $\int_0^1 t^3 e^{t^2} dt.$

□ 05 Calculer à l'aide d'une intégration par parties :

$$\int_1^2 \frac{t \ln(t)}{(1+t^2)^2} dt.$$

On pourra montrer que

$$\forall t \in [1, 2], \quad \frac{1}{t(1+t^2)} = \frac{1}{t} - \frac{t}{1+t^2}.$$

□ 06 Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_1^e \frac{\ln(t)}{t} dt$, on posera $u = \ln(t)$.
2. $\int_0^3 t\sqrt{1+t} dt$, on posera $u = \sqrt{1+t}$.

□ 07

1. Déterminer a et b tels que, pour tout $u \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$,

$$\frac{1}{u(u+1)} = \frac{a}{u} + \frac{b}{u+1}.$$

2. Calculer $\int_0^1 \frac{1}{1+e^t} dt$, on posera $u = e^t$.

□ 08 Déterminer, si elles existent, les dérivées des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ suivantes :

1. $x \mapsto \int_0^x e^{-t^2} dt.$

2. $x \mapsto \int_{x^2}^{x^3} e^{-t^2} dt.$

□ 09 Déterminer la primitive de $x \mapsto xe^{-2x}$ qui s'annule en 0.

□ 10 Soit f une fonction continue sur un segment $[a, b]$, avec $a \leq b$.

1. Justifier l'existence de $\max_{t \in [a, b]} f(t)$ et $\min_{t \in [a, b]} f(t)$.

2. Soit

$$I = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt.$$

Montrer que

$$\min_{t \in [a, b]} f(t) \leq I \leq \max_{t \in [a, b]} f(t).$$

□ 11

1. Déterminer le sens de variation de la suite $\left(\int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2} dt \right)_{n \in \mathbb{N}}$.

2. Montrer que pour tout entier naturel n , $\forall t \in [0, 1], \quad 0 \leq \frac{t^n}{1+t^2} \leq t^n$.

3. En déduire la valeur de $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2} dt$.

□ 12 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 t^n e^t dt$.

1. Montrer que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

2. Montrer à l'aide d'un encadrement que $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.

3. Déterminer une relation entre I_n et I_{n+1} pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+1} + I_n = e \left(1 - \frac{n}{e} I_n \right)$. Puis que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{e} \times I_n = 1$.

□ 13 On note pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $F(x) = \int_x^{2x} \sqrt{1+t^4} dt$.

1. Déterminer le signe de F .

2. On note G une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto \sqrt{1+x^4}$.

Exprimer F en fonction de G . En déduire que F est dérivable.

3. Montrer que pour tout $t \geq 0 : t^2 \leq \sqrt{1+t^4} \leq 1+t^2$.

4. En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$.

5. Montrer que F réalise une bijection de $\mathbb{R}^+$ dans un ensemble à préciser.